

Графы

1. В графе степени все вершин хотя бы 100. Докажите, что в нем найдется простой цикл длины не менее 101.
2. В графе средняя степень вершины равна d . Докажите, что в нём найдется подграф, в котором степень каждой вершины не меньше $d/2$.
3. На плоскости выделено конечное множество точек с целочисленными координатами. Докажите, что их можно раскрасить в красный и синий таким образом, чтобы количества красных и синих точек на любой прямой, параллельной какой-то из координатных осей, отличались не больше чем на единицу.
4. Рассмотрим двудольный граф с долям по 222 вершины, степень каждой вершины 3. Его рёбра раскрашены в k цветов, причем все цвета присутствуют. При каком наименьшем k можно гарантировать, что в этом графе найдется совершенное паросочетание, все рёбра в котором разного цвета?
5. У Даши есть полный граф на n вершинах. Она повторяет следующую операцию: находит в графе цикл длины 4 и удаляет из него произвольное ребро. Граф с каким наименьшим количеством рёбер Даша может получить такими операциями?
6. Пусть m — целое положительное число. Дана таблица $4m \times 4m$, состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовём родственными, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.