

Графы

1. В графе средняя степень вершины равна d . Докажите, что в нём найдется подграф, в котором степень каждой вершины не меньше $d/2$.
2. На плоскости выделено конечное множество точек с целочисленными координатами. Докажите, что их можно раскрасить в красный и синий таким образом, чтобы количества красных и синих точек на любой прямой, параллельной какой-то из координатных осей, отличались не больше чем на единицу.
3. Рассмотрим двудольный граф с 222 вершины, степень каждой вершины 3 . Его рёбра раскрашены в k цветов, причем все цвета присутствуют. При каком наименьшем k можно гарантировать, что в этом графе найдется совершенное паросочетание, все рёбра в котором разного цвета?
4. У Даши есть полный граф на n вершинах. Она повторяет следующую операцию: находит в графе цикл длины 4 и удаляет из него произвольное ребро. Граф с каким наименьшим количеством рёбер Даша может получить такими операциями?
5. Докажите, что если в графе на n вершинах не больше $2n - 4$ рёбер, в нём можно выбрать такое подмножество вершин, что никакие две из них не соединены ребром, а при удалении этих вершин вместе со всеми исходящими из них рёбрам граф перестаёт быть связным.
6. В стране n городов и n дорожных компаний. Между некоторыми парами городов проложены дороги, каждая принадлежит какой-то из компаний. Между двумя городами может быть проложено больше одной дороги. Каждая компания владеет нечетным числом дорог, причем эти дороги образуют замкнутый маршрут. Докажите, что найдется замкнутый маршрут нечетной длины, все дороги которого принадлежат разным компаниям.