Латинские квадраты

Латинским квадратом порядка n называется таблица размера $n \times n$, заполненная числами $1, 2, \ldots, n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце каждое число встречается ровно 1 раз. Будем обозначать элемент, стоящий в i-той строке и j-том столбце латинского квадрата A через $A(i, j)$.

Два латинских квадрата A и B называются **ортогональными**, если все упорядоченные пары вида $(A(i, j), B(i, j))$ различны.

Неполным латинским квадратом порядка n назовем таблицу размера $n \times n$, в которой некоторые ячейки заполнены числами $1, 2, \ldots, n$ так, что каждое число встречается не более одного раза в каждой строке и в каждом столбце.

1. Докажите, что для любого n существует латинский квадрат порядка n.

2. **(а)** Существует ли пара ортогональных латинских квадратов порядка 2?
(б) Постройте пару ортогональных латинских квадратов порядка 4.

3. Докажите, что для нечетного n существует пара ортогональных латинских квадратов.

4. **(а)** Рассмотрим латинские квадраты A и B порядков n и m соответственно. Будем нумеровать строки и столбцы с 0, а не с 1 (то есть для латинского квадрата порядка k числами $0, 1, \ldots, k-1$). Также заменим в A число n на 0, а в B — m на 0. Произведением AB латинских квадратов A и B назовем таблицу размера $nm \times nm$, заданную формулой

$$(AB)(i_1 m + i_2, j_1 m + j_2) = A(i_1, j_1)m + B(i_2, j_2).$$

Докажите, что произведение латинских квадратов — это латинский квадрат.
(б) Докажите, что если существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n и порядка m, то существует и пара ортогональных латинских квадратов порядка nm.
(в) Докажите, что если n дает остаток $0, 1$ или 3 при делении на 4, то существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n.

5. Докажите, что количество неполных латинских квадратов, у которых заполнены первые две строки, равно $n! \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{(-1)^i}{i!}$.

6. **(а)** В неполном латинском квадрате порядка n заполнено n ячеек. Всегда ли его можно дополнить до латинского квадрата?
(б) Всегда ли есть решение у судоку (возможно, не единственное), в котором изначально отмечено 8 цифр?

(в) Пусть в неполном латинском квадрате заполнен левый верхний квадрат A размера $s \times t$. Докажите, что его можно дополнить до латинского квадрата тогда и только тогда, когда в A каждое число содержится не менее $s + t - n$ раз. В частности, если в неполном латинском квадрате заполнены первые s строк, то его можно дополнить до латинского квадрата.
(г) Пусть A — латинский квадрат порядка n, B — неполный латинский квадрат порядка $(n+1) \times (n+1)$. Пусть $B(i,j) = A(i,j)$, если $i + j \leqslant n+1$, $B(i,j) = n + 1$, если $i + j = n + 2$, а остальные клетки пустые. Докажите, что B можно дополнить до латинского квадрата.
(д) Докажите, что любой неполный латинский квадрат, в котором заполнено не более $n - 1$ ячейки, можно дополнить до полного.

7. Докажите, что латинских квадратов порядка n не меньше, чем $n!(n-1)!\ldots 2!1!$.