Основная идея аддитивной комбинаторики

1. Имеется последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$, в разложение каждого из которых на простые множители входят только простые числа, меньшие 1000. Докажите, что из этой последовательности можно выбрать несколько подряд идущих чисел, произведение которых точный квадрат.

2. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.

3. Для числового множества X определим $X' = \{s - t \mid s, t \in X, s \neq t\}$. Пусть $S = \{1, 2, \dots, 2000\}$. Рассмотрим два множества $A, B \subset S$ такие, что $|A| \cdot |B| \geqslant 3999$. Докажите, что $A' \cap B' \neq \varnothing$.

4. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ дают при делении на некоторое число m попарно различные остатки, причём $n > m/2$. Докажите, что для любого целого k найдутся два не обязательно различных натуральных числа $i, j \leqslant n$, что $a_i + a_j \equiv k \ (mod\ m)$.

5. Докажите, что для любого простого p и любого целого k найдутся такие целые x и y, что $x^2 + y^2 \equiv k \ (mod\ p)$.

6. Даны непересекающиеся конечные множества натуральных чисел A и B, состоящие из n и m элементов соответственно. Известно, что каждое натуральное число, принадлежащее A или B, удовлетворяет хотя бы одному из условий $k + 37 \in A$, $k - 19 \in B$. Докажите, что $37n = 19m$.

7. Натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 100$ содержатся в объединении N геометрических прогрессий (не обязательно с целыми знаменателями).
(а) Докажите, что $N \geqslant 13$;
(б) Докажите, что $N \geqslant 20$;
(в) Докажите, что $N \geqslant 31$.

8. В ряд выписано 26 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на несколько частей так, чтобы сумма чисел, образованных цифрами каждой из частей, делилась на 13.