Цепные дроби

Бесконечная цепная дробь — это выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}, \quad \text{где} \quad a_i \text{ — натуральные числа при } i > 0,\ a_0 \text{ — целое.}$$

Более компактная запись: $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Конечная цепная дробь — выражение аналогичного вида, но с конечным числом коэффициентов a_i. Обозначается, соответственно, $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Понятно, что конечная цепная дробь равна некоторому рациональному числу. Конечная цепная дробь, состоящая из некоторого начального отрезка бесконечной цепной дроби называется *подходящей дробью* к этой бесконечной цепной дроби.

1. **(а)** Пусть α — действительное число, T — натуральное. Докажите, что существуют целые числа p и q, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qT}, \quad 1 \leqslant q \leqslant T.$$

(б) Пусть α — иррациональное число. Тогда существует бесконечное множество несократимых дробей $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

2. Пусть дана бесконечная цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Предположим, что $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — несократимая дробь, соответствующая подходящей дроби.

(а) Докажите, что выполнены следующие тождества

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

(б) Докажите, что

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

(в) Докажите, что

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n.$$

(г) Докажите, что отрезки $\left[\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right]$ образуют систему вложенных отрезков, причём их длина стремится к 0. Из этого будет следовать, что существует единственное число, принадлежащее всем этим отрезкам одновременно. Его мы и будем отождествлять с бесконечной цепной дробью.

(д) Докажите, что любое иррациональное число раскладывается в цепную дробь, притом единственным образом.

3. Докажите, что для любого иррационального α существует бесконечно много целых взаимно простых p и q, таких что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

4. Как с помощью разложения в цепную дробь рационального числа $\frac{a}{b}$, где a и b взаимно просты найти хотя бы одно решение уравнения $ax - by = 1$?

5. Докажите, что периодическая цепная дробь всегда представляет некоторую квадратичную иррациональность, то есть иррациональный корень некоторого квадратного уравнения.

6. **Теорема.** Если выполнено неравенство из задачи 3, то $\frac{p}{q}$ является подходящей дробью к числу α.

7. Используя теорему выше, докажите, что любое решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ является парой числителя и знаменателя некоторой подходящей дроби к $\sqrt{d}$.

8. **(а)** **Теорема Лиувилля (1844).** Пусть α — алгебраическое число степени $n > 1$ (т.е. корень многочлена степени n с целыми коэффициентами). Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ выполняется $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{C(\alpha) q^n}$.

(б) Приведите пример трансцендентного (не алгебраического) числа.