Комби-разнобой с ЮМТ

1. *Решите эту задачу симпатично. Без неприятного перебора случаев в бесконечных конструкциях.* Рассмотрим граф, в котором каждое ребро принадлежит не более чем трём циклам. Докажите, что его вершины можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, имели разные цвета.

2. В правильном 1000-угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника.
(а) Докажите, что среди них есть не менее девяти различных по длине.
(б) Можно ли гарантировано найти не менее 10 различных по длине?

3. В k клеток доски 2024×2024 кладут по одному шарику так, что никакие два шарика не лежат в соседних по стороне клетках. При каком наибольшем $k \leqslant \dfrac{2024^2}{2}$ независимо от расположения шариков можно переместить один из шариков на свободную соседнюю по стороне клетку так, чтобы по-прежнему никакие два шарика не оказались в соседних клетках?

4. Даны три кучи, в которых изначально содержится 2000, 4000 и 4899 камней. Али и Баба делают ходы по очереди, первый ход делает Али. За один ход игрок может выбрать две кучи и переложить несколько камней из одной кучи в другую, при условии, что в конце хода в куче, из которой перекладываются камни, будет не меньше камней, чем в куче, в которую они перекладываются. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

5. Числа $1, 2, 3, \ldots, 101$ выписаны в строку. У Васи есть 100 карточек, на каждой из которых написаны два различных натуральных числа, не превосходящих 101. Вася может взять любую из своих карточек, прочитать написанные на ней числа a и b, и поменять местами числа, стоящие в строке на a-м и b-м местах. Оказалось, что, используя свои карточки, Вася может получить любой порядок чисел в строке. Докажите, что если он использует все свои карточки по порядку 101 раз (то есть первую, вторую, ..., сотую, первую, ..., сотую), то все числа в строке вернутся на свои места.

6. Пусть n — натуральное число. Каково наименьшее число m $(m > n)$, при котором множество всех натуральных чисел от n до m (включительно) можно разбить на подмножества так, чтобы в каждом подмножестве одно из чисел равнялось сумме других чисел этого подмножества?

7. В стране есть несколько городов, часть из которых соединена двусторонними дорогами так, что из каждого города страны можно добраться до любого другого. Утром несколько машин выехали из некоторых городов в другие, а вечером вернулись обратно (возможно, по другому маршруту). Инспектор посчитал, сколько машин проехало по каждой дороге в ту и в другую сторону, и на тех дорогах, на которых эти числа различались, ввёл одностороннее движение в ту сторону, в которую проехало больше машин. Докажите, что если водители захотят проехать из того же пункта отправления в тот же пункт назначения и обратно, они смогут это сделать.