По следам Южного турнира...

1. В остроугольном треугольнике ABC с $CA = CB$ точка E лежит на описанной окружности ABC так, что $\angle ECB = 90^\circ$. Прямая, проходящая через E параллельно CB, пересекает CA в точке F и AB в точке G. Докажите, что центр описанной окружности треугольника EGB лежит на описанной окружности треугольника ECF.

2. Дана замкнутая 100-звенная ломаная без самопересечений, где каждое ребро имеет длину один. Какое наибольшее число вершин этой ломаной может лежать на окружности радиуса один ?

3. Существует четырехугольник $\mathcal{Q}_1$ такой, что середины его сторон лежат на окружности. Докажите, что существует вписанный четырёхугольник $\mathcal{Q}_2$ с теми же сторонами, что и $\mathcal{Q}_1$ с двумя одинаковыми углами.

4. Пусть n — натуральное число. Даны $2n$ различных прямых на плоскости, среди которых нет двух параллельных. Некоторые n из этих $2n$ прямых покрашены синим, а оставшиеся n прямых покрашены красным. Через B обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной синей прямой, а через R обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной красной прямой. Докажите, что существует окружность, которая с каждым из множеств B и R имеет ровно по $2n-1$ общих точек.

5. **(а)** Дан треугольник ABC. На его описанной окружности на меньшей дуге BC выбрана точка P. Точка P' лежит на прямой AP так, что середина отрезка PP' лежит на прямой BC. Пусть P^* — изогонально сопряженная относительно треугольника ABC к точке P'. Окружность ω_a проходит через A середины AB и AC. Докажите, что P^* лежит на окружности ω_a.

(б) Лемма. Пусть окружности ω, Ω и точка P (как окружность нулевого радиуса) имеют общую радикальную ось, причем ω лежит внутри круга с границей Ω. Пусть T — фиксированная точка внутри круга с границей ω, X — произвольная точка на Ω. Прямая TX пересекает ω в точках Y и Z. Докажите, что величина

$$(\angle TPX, PZ) \cdot (\angle TPX, PY)$$

не зависит от выбора точки X.

Напоминание: Простым отношением угла $\angle AXB$ и прямой l ($X \in l$) назовем величину:

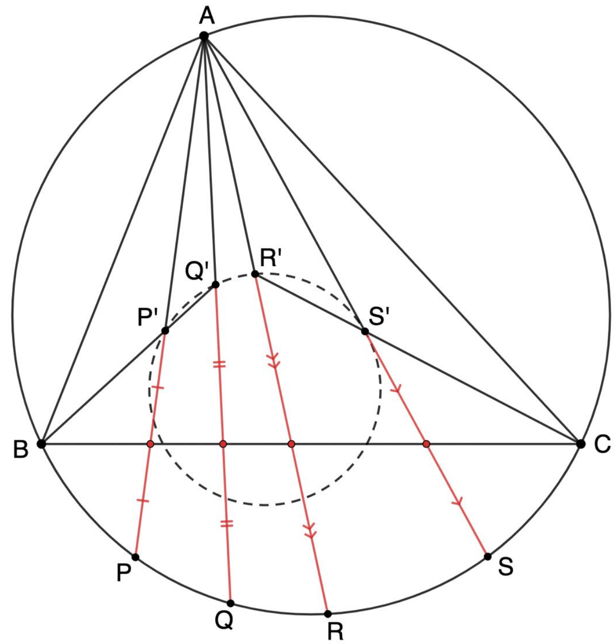
$$(\angle AXB, l) = (\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XB}, l) = \frac{\sin\angle(\overrightarrow{XA}, \vec{l})}{\sin\angle(\vec{l}, \overrightarrow{XB})}, \qquad (1)$$

где $\vec{l}$ — направляющий вектор прямой l.

Углы в формуле (1) понимаются как **ориентированные** углы, то есть углы между векторами. Угол $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ это тот, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\vec{a}$, чтобы получить $\vec{b}$.

(в) *Решите без использования кубических кривых и коник.*

Дан треугольник ABC. На его описанной окружности на меньшей дуге BC выбраны точки P, Q, R, S. Точки P', Q', R', S' лежат на прямых AP, AQ, AR, AS так, что середины отрезков PP', QQ', RR', SS' лежат на прямой BC. Оказалось, что B, P', Q' — одна прямая и C, R', S' — одна прямая. Докажите, что точки P', Q', R', S' лежат на одной окружности.



6. Внутри вписанного семиугольника $A_1A_2\dots A_7$ дана точка P. Оказалось, что основания перпендикуляров из P на стороны семиугольника лежат на одной окружности. Докажите, что центры семи описанных окружностей треугольников вида PA_iA_{i+1} тоже лежат на одной окружности.