Случайные блуждания

Определение. Будем называть ломаную $A_1A_2\ldots A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания*, если $A_1 = (m, k)$, где m и k — целые и, если $A_i = (x, y)$, то $A_{i+1} = (x+1, y+1)$ или $A_{i+1} = (x+1, y-1)$. Число n будем называть *длиной* траектории, A_1 *началом* траектории, а A_n — её *концом*. Будем называть траекторию *правильной*, если ее начало находится в точке $(0, 0)$.

Определение. Пусть ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i = (x_i, y_i)$. Тогда *уровнем* этой траектории будем называть число

$$L(A_1A_2\ldots A_n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - y_1).$$

Обозначим за $p(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n, оканчивающихся в точке (n, k), к количеству правильных траекторий длины n.

Обозначим за $T(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n уровня k, достигающих его впервые в конце траектории, к количеству правильных траекторий длины n.

1. Найдите $p(n, k)$.

2. *(Принцип отражения.)* Для натуральных a и b докажите, что число траекторий с началом $(0, a)$ и концом (n, b), имеющих точки на оси абсцисс, равно числу траекторий, ведущих из $(0, -a)$ в (n, b).

3. Докажите, что $2T(n, k) = p(n-1, k-1) - p(n-1, k+1)$.

4. Найдите $T(2n, 2k)$.

5. Найдите количество правильных траекторий длины n уровня m, проходящих через точку (n, k).

6. Найдите количество правильных траекторий длины n уровня m.

7. Найдите количество правильных траекторий длины n, не имеющих точек на оси абсцисс (кроме начала), конец которых находится в точке (n, k).

8. **(а)** Найдите количество правильных траекторий длины n, имеющих ровно две точки на оси абсцисс: начало и конец.

(б) Найдите количество траекторий длины n, начинающихся и заканчивающихся на оси абсцисс, а также имеющих на оси абсцисс ещё ровно k точек.