Интересные функции в ТЧ

Напомним несколько обозначений:

- $\tau(n)$ — количество делителей числа n;
- $\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей числа n;
- $\varphi(n)$ — количество чисел, которые не превосходят число n и взаимно просты с ним.

1. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i — простые числа. Выразите через p_i и α_i величины $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$.

2. При каких n число $\sigma(n)$ нечётно?

3. Известно, что $n = pq$, где p, q — простые числа, но ни n, ни p, ни q не даны.

(а) Найдите n и $p+q$, зная $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$.

(б) Найдите p и q, зная $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$.

4. Пусть p — наибольший простой делитель числа n. Докажите, что $\varphi(n) \geqslant \frac{n}{p}$.

5. Докажите, что

$$\textbf{(а)} \quad \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]; \qquad \textbf{(б)} \quad \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} k \left[\frac{n}{k}\right].$$

6. Рассмотрим n — наименьшее натуральное число, для которого $\sigma(a^n) - 1$ делится на 2021 при любом натуральном a. Найдите сумму простых делителей n.

7. Найдите все целые n, для которых выполнено $\varphi(\sigma(2^n)) = 2^n$.