Интересные функции в ТЧ

Напомним несколько обозначений:

- $\tau(n)$ — количество делителей числа n;
- $\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей числа n;
- $\varphi(n)$ — количество чисел, которые не превосходят число n и взаимно просты с ним.

1. Известно, что $n = pq$, где p, q — простые числа, но ни n, ни p, ни q не даны.
(а) Найдите n и $p + q$, зная $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$.

(б) Найдите p и q, зная $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$.

2. Пусть p — наибольший простой делитель числа n. Докажите, что $\varphi(n) \geqslant \frac{n}{p}$.

3. Докажите, что

$$\textbf{(а)}\quad \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]; \qquad \textbf{(б)}\quad \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{n}{k}\right].$$

4. Рассмотрим n — наименьшее натуральное число, для которого $\sigma(a^n) - 1$ делится на 2021 при любом натуральном a. Найдите сумму простых делителей n.

5. Найдите все целые n, для которых выполнено $\varphi(\sigma(2^n)) = 2^n$.

6. Положим $f(n)$ — количество способов представить n в виде произведения натуральных чисел, больших единицы, причем способы, отличающиеся перестановкой множителей, считаются одинаковыми. Докажите, что если p — простой делитель n, то $f(n) \leqslant \frac{n}{p}$.

7. Найдите все такие функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что при любых $n, m \in \mathbb{N}$ число

$$\big(g(m) + n\big)\big(g(n) + m\big)$$

является точным квадратом.