Очная диагностическая работа. Решения.

1. Несколько девятиклассников, десятиклассников и одиннадцатиклассников встали в круг. Оказалось, что имеется ровно 20 девятиклассников и ровно 25 одиннадцатиклассников, которые стоят рядом с хотя бы одним десятиклассником. Докажите, что рядом с кем-то стоят два десятиклассника.

Решение: Предположим противное. Тогда посчитаем число пар рядом стоящих десятиклассника и не десятиклассника. С одной стороны, так как рядом с девятиклассником или одиннадцатиклассником стоит не более одного десятиклассника, таких пар всего 20+25=45. С другой стороны, каждый блок из нескольких подряд идущих десятиклассников даёт нам две такие пары (на обоих концах этого блока), то есть чётное число. Противоречие.

2. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2.$$

Найдите $f(1)$, если известно, что $g(1) = 3, f(4) = 7$ и $g(4) = 4$.

Ответ: 5.

Решение: Рассмотрим многочлен $h(x) = 2g(x) - f(x)$. Ясно, что $deg\ h \leqslant 2$, а также, что $h(2) = h(3) = 0$. Значит $h(x) = a(x-2)(x-3)$. Тогда

$$a(4-2)(4-3) = h(4) = 2g(4) - f(4) = 1,$$

т.е. $a = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{2}(1-2)(1-3) = h(1) = 2g(1) - f(1) = 6 - f(1),$$

т.е. $f(1) = 5$.

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что $b^2a - 1$ делится на $ac - 1$, $a^2c - 1$ делится на $bc - 1$ и $c^2b - 1$ делится на $ab - 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c — точный квадрат.

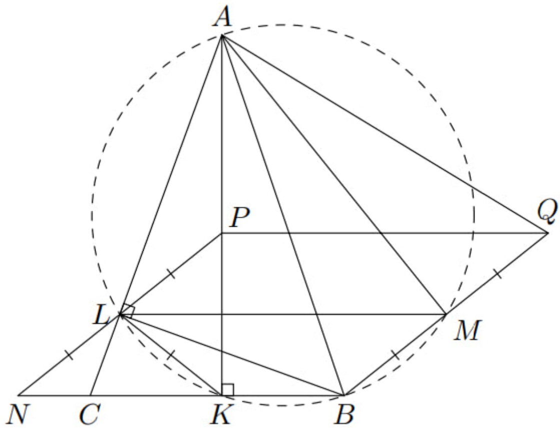
Решение: Мы можем считать, что $a, b, c > 1$, иначе требуемое верно. Пусть, не умоляя общности, c — наименьшее из чисел a, b, c. Тогда

$$c^2b - 1 \vdots ab - 1 \Rightarrow c^2b - 1 - (ab-1) \vdots ab - 1 \Rightarrow b(c^2 - a) \vdots ab - 1.$$

Так как НОД$(b, ab-1) = 1$, получаем, что $c^2 - a \vdots ab - 1$. Но, так как $c^2 \leqslant ab, a < ab$, $a > 1$, то $|c^2 - a| < ab - 1$, т.е. $c^2 - a = 0$ и $a = c^2$, что и требовалось.

4. AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC. На отрезке AK выбрана точка P таким образом, что $LK = LP$. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекается с прямой, проходящей через B параллельно PL, в точке Q. Докажите, что $\angle AQB = \angle ACB$.

Решение: Обозначим через N точку пересечения прямых BC и LP и через M — середину BQ. В прямоугольном треугольнике $NKPKL = LP$, следовательно, KL — медиана, и $NL = LP$. Прямая LM является средней линией параллелограмма $NPQB$, то есть параллельна его основанию. Заметим, что точки A, B, K, L лежат на окружности с диаметром AB. И на этой же окружности лежит точка M, так как $MBKL$ – равнобедренная трапеция. Таким образом, $AM \perp BQ$, то есть треугольник ABQ — равнобедренный, и $\angle ABQ = \angle AQB$. Осталось доказать, что $\angle ABQ = \angle ACB$. Это равносильно тому, что $\angle CBQ = 180^\circ - \angle CAB$. Так и есть: $\angle CBQ = 180^\circ - \angle PNK = 180^\circ - \angle CKL = 180^\circ - \angle CAB$.

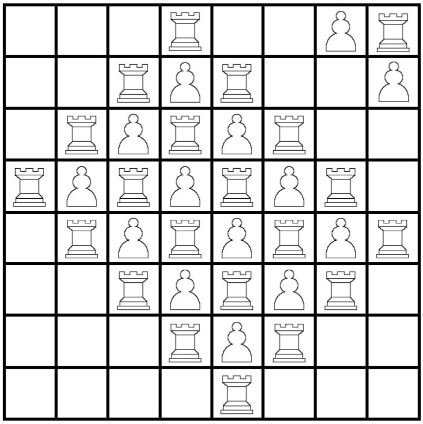


5. Олег расставил на доске 200×200 10101 ладью и n пешек. Оказалось, что ни одна ладья не бьёт другую. Найдите наименьшее возможное значение n. (Если между ладьями стоит пешка, то они не бьют друг друга.)

Ответ: 9902.

Решение: Оценка: опустим из каждой ладьи отрезок вниз до первого пересечения с пешкой или границей доски. В каждую пешку входит не более одного отрезка. Так как на границу приходится не более 200 отрезков, то пешек на доске минимум 9901. Предположим, что удалось поставить 10101 ладью и ровно 9901 пешку. Тогда в каждую пешку должен приходить ровно один отрезок. Докажем, что тогда при k от 1 до 100 в k-й снизу строке стоит не более k ладей. Действительно, предположим, что при некотором k в k-й строке стоит хотя бы $k+1$ ладья. Рассмотрим прямоугольник $k \times 200$, прилегающий к нижней стороне доски. В каждой его строчке количество ладей не более чем на 1 превышает количество пешек, поэтому во всем прямоугольнике ладей не более чем на k больше, чем пешек. С другой стороны, в каждом столбце этого прямоугольника ладей не меньше, чем пешек, иначе в какую-то пешку не придет отрезок. Кроме того, в $k+1$ столбцах, содержащих ладьи k-ой строки, ладей строго больше, чем пешек. Поэтому ладей хотя бы на $k+1$ больше, чем пешек. Противоречие. Значит, в прямоугольнике 100×200, прилегающем к нижней стороне доски, стоит не более $1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$ ладей. Аналогично, в верхнем прямоугольнике не более 5050 ладей. Тогда всего ладей не более 10100. Противоречие.

Пример: расставим ладьи и пешки в "параллелограмме"с вершинами в клетках (0, 101), (101,0), (100,200), (200,100) аналогично приведённому примеру для квадрата 8×8 (см. рисунок), а также одну ладью, окружённую двумя пешками, поставим в угол.



Ясно, что никакие две ладьи друг друга не бьют, всего ладей будет $100 \cdot 101 + 1 = 10101$, а пешек $99 \cdot 100 + 2 = 9902$.