Изогональное сопряжение в треугольнике

Точки P и Q называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если прямые AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно биссектрис углов A, B, C треугольника соответственно.

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке B относительно середины отрезка AC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Внутри треугольника ABC взята точка P. Пусть Q — центр окружности, проходящей через точки, симметричные P относительно сторон. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены.

3. **Педальная окружность.** Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q, изогонально сопряженной точке P.

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям. Диагонали пересекаются в точке M. Точка S диаметрально противоположна M на описанной окружности треугольника CMD. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

5. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

6. **Теорема Паскаля.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Отрезки AC и BF пересекаются в точке X, отрезки AD и BE — в точке Y, отрезки FD и CE — в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

7. Пусть H – основание высоты из вершины A треугольника ABC и H_a – точка, симметричная точке H относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке X. Перпендикуляр к XH_a, проведенный в точке H_a, пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.

8. Точки P, Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC. W - середина дуги BAC окружности (ABC). Прямая, которая проходит через точку P и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках P_c, P_b соответственно. Прямая, которая проходит через точку Q и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках Q_c, Q_b соответственно. Прямые WP и WQ повторно пересекают окружность (ABC) в точках X, Y соответственно. Докажите, что точки P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности.

Изогональное сопряжение в треугольнике

Точки P и Q называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если прямые AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно биссектрис углов A, B, C треугольника соответственно.

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке B относительно середины отрезка AC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Внутри треугольника ABC взята точка P. Пусть Q — центр окружности, проходящей через точки, симметричные P относительно сторон. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены.

3. **Педальная окружность.** Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q, изогонально сопряженной точке P.

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям. Диагонали пересекаются в точке M. Точка S диаметрально противоположна M на описанной окружности треугольника CMD. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

5. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

6. **Теорема Паскаля.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Отрезки AC и BF пересекаются в точке X, отрезки AD и BE — в точке Y, отрезки FD и CE — в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

7. Пусть H – основание высоты из вершины A треугольника ABC и H_a – точка, симметричная точке H относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке X. Перпендикуляр к XH_a, проведенный в точке H_a, пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.

8. Точки P, Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC. W - середина дуги BAC окружности (ABC). Прямая, которая проходит через точку P и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках P_c, P_b соответственно. Прямая, которая проходит через точку Q и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках Q_c, Q_b соответственно. Прямые WP и WQ повторно пересекают окружность (ABC) в точках X, Y соответственно. Докажите, что точки P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности.