

Неравенство Гёльдера

1. (а) Докажите, что если три набора $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ неотрицательных вещественных чисел удовлетворяют соотношениям $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = 1$, то тогда

$$1 \geq \sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n}.$$

- (б) Докажите **неравенство Гёльдера** для любых трёх наборов $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ неотрицательных вещественных чисел:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \geq (\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n})^3.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для большего числа наборов.

2. Не раскрывая никаких скобок, для любых положительных чисел a, b, c докажите

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

3. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 1.$$

4. Даны неотрицательные вещественные числа x, y, z с суммой 3. Докажите

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geq \sqrt{3}.$$

5. Для положительных a, b, c, d верно $(a^3 + b^3)^4 = c^3 + d^3$. Докажите, что $a^4 c + b^4 d \geq cd$.

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $xu + yz + zx = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 6y} + \sqrt[3]{\frac{1}{y} + 6z} + \sqrt[3]{\frac{1}{z} + 6x} \leq \frac{1}{xyz}.$$