

Покрывтия и теорема Хелли

1. **(Теорема Хелли для прямой)** На прямой дано конечное число отрезков. Известно, что любые два отрезка имеют общую точку. Докажите, что тогда и все отрезки имеют общую точку.
2. На плоскости даны несколько прямоугольников со сторонами, параллельным осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.
3. На прямой дано конечное число отрезков. **(а)** Пусть среди любых трёх отрезков какие-то два имеют общую точку. Докажите, что эти отрезки можно разбить не более чем на два подмножества так, что в каждом подмножестве все отрезки имеют общую точку. **(б)** Пусть среди любых трёх отрезков какие-то два не имеют общей точки. Докажите, что эти отрезки можно разбить не более чем на два подмножества так, что в каждом подмножестве никакие два отрезка не имеют общей точки. **(в)** На прямой даны $mn + 1$ отрезков. Докажите, что есть или $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, или $n + 1$ отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.
4. **(а)** На окружности даны несколько дуг, каждые две имеют общую точку и каждая меньше трети окружности. Докажите, что все дуги имеют общую точку. **(б)** На окружности даны несколько дуг, длина каждой меньше длины полуокружности. Докажите, что если каждые три дуги имеют общую точку, то и все дуги имеют общую точку.
5. **(Теорема Хелли для плоскости)** На плоскости дано конечное число выпуклых множеств, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что тогда и все множества имеют общую точку.
6. На плоскости дано конечное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что и все точки можно накрыть кругом радиуса 1.
7. Дан выпуклый 7-угольник. Рассмотрим все выпуклые 5-угольники с вершинами в вершинах 7-угольника. Докажите, что эти пятиугольники имеют общую точку.
8. Линейное неравенство от x, y — это неравенство вида $ax + by + c > 0$. Докажите, что если из 100 таких неравенств любые 3 имеют общее решение, то и все 100 неравенств имеют общее решение.