

Отборочная олимпиада

1. Про вещественные a, b, c известно, что $ab - 1 < a - b$ и $ac - 1 < a - c$. Докажите, что $bc + 1 > b + c$.
2. Изначально на доске нарисован треугольник. Если на доске в данный момент нарисован треугольник со сторонами a, b, c , то Даша стирает его и рисует вместо него треугольник со сторонами $p - a, p - b, p - c$ ($p = \frac{a+b+c}{2}$) если такой треугольник существует, а иначе она останавливается и плачет. Для каких изначальных треугольников Даша никогда не заплачет?
3. Ваня выписал в ряд n целых ненулевых чисел. Оказалось, что если сложить любые 7 подряд идущих чисел, то получится положительное число, а если сложить любые 11 подряд идущих чисел, то получится отрицательное число. Найдите наибольшее возможное значение n .
4. Дан фиксированный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . Точка D выбирается на продолжении стороны BC за точку B . Пусть E — середина AD , а F — точка пересечения окружностей (ACD) и (BDE) , отличная от D . Докажите, что прямая EF проходит через фиксированную точку.
5. Найдите все натуральные m обладающие следующим свойством: для любого целого x найдётся такое целое y , что $y^3 + y - x \div m$.