# Вписанная парабола и точка Микеля

**Определение**. Параболой с фокусом $F$ и директрисой $l$ называется геометрическое место точек $P$ таких, что $P$ равноудалена от $l$ и $F$.

1. **(Оптическое свойство параболы)**. Пусть прямая $p$ касается параболы с директрисой $l$ и фокусом $F$ в точке $P$. Пусть $H$ - проекция $P$ на $l$. Докажите, что $p$ - биссектриса угла $HPF$.

2. **(Парабола и изогонали)**. Пусть касательные $a$ и $b$ к параболе с фокусом $F$ и директрисой $l$ в лежащих на ней точках $A$ и $B$ пересекаются в точке $C$. Тогда
**(а)** Прямая, изогональная к $CF$ относительно угла $ACB$, перпендикулярна $l$.
**(б)** Прямая $FC$ - биссектриса угла $AFB$.
**(в)** Точки $A$ и $B$ равноудалены от прямой, проходящей через $C$ перпендикулярно к $l$ *(почему я включил этот факт в задачу про параболу и изогонали?)*.

3. **(Парабола и прямые углы)**. Пусть дана парабола $\Delta$ с фокусом $F$ и директрисой $l$. Тогда
**(а)** Геометрическое место точек $P$ таких, что прямая, перпендикулярная $FP$, касается $\Delta$ - это прямая, параллельная $l$ и касающаяся $\Delta$ (в её вершине).
**(б)** Геометрическое место точек $P$ таких, что касательные из точки $P$ к параболе перпендикулярны - это её директриса $l$.
**(в)** *Эта задача очень забавна, но не так важна для основного сюжета листика - так что я рекомендую пропустить её, и вернуться при желании, когда вам уже останется не так много задач с листка*. Загляните в предыдущий листик, в последний пункт задачи номер семь. Там прямой угол заменялся на фиксированный ориентированный. А какое ГМТ получится, если сделать так же в первых двух пунктах этой задачи?

4. **(Парабола и описанности)**. Пусть вокруг параболы $\Delta$ с фокусом $F$ и директрисой $l$ описан треугольник $ABC$. Тогда
**(а)** Окружность $(ABC)$ проходит через $F$. Чем будет прямая Симсона точки $F$?
**(б)** Ортоцентр треугольника $ABC$ лежит на $l$.
**(в)** Докажите существование точки Микеля: если даны 4 прямые общего положения, то тогда описанные окружности четырёх треугольников, ими образованных, имеют общую точку. Рассмотрите для этого параболу $\Delta$, касающуюся этих четырёх прямых. Если вы были на прошлом занятии - скажите, почему она существует?
**(г)** Докажите существование прямой Обера: если даны 4 прямые общего положения, то ортоцентры четырёх треугольников, ими образованных, лежат на одной прямой. Что это за прямая в терминах $\Delta$? Покажите, что на этой прямой также лежат точки, симметричные точке Микеля относительно исходных прямых.
**(д)** Докажите, что прямая Гаусса четырёхсторонника, образованного нашими 4 прямыми общего положения, существует и перпендикулярна прямой Обера (прямой Гаусса называется прямая, проходящая через середины диагоналей четырёхсторонника).
**(е)** Переосмыслите произошедшее в этой задаче таким образом: пусть даны две прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $C$, и по ним с постоянными скоростями движутся точки $A$ и $B$. Тогда, как мы знаем из свойств поворотной гомотетии, окружность $ABC$ проходит через ещё одну фиксированную точку $F$, отличную от $C$. Докажите, что прямая $AB$ всегда касается фиксированной параболы с фокусом $F$.

5. Парабола $\Delta$ вписана в фиксированный угол. Найдите геометрическое место середин отрезков, высекаемых на касательной к $\Delta$ сторонами угла.

Общий принцип, на который следует ориентироваться - это то, что любые семейства прямых с общей точкой Микеля, которые могут встречаться в задачах, выглядят как касающиеся одной параболы (что довольно характерно выглядит на чертеже) и, более того, помимо этой точки важную роль играет директриса (она же прямая Штейнера или Обера). В частности, на ней живут ортоцентры кучи треугольников и точки, симметричные точке Микеля относительно сторон четырёхсторонника. Сам факт наличия параболы на картинке нужен не всегда - но он очень изящно связывает всю довольно объёмную пачку фактов про обсуждаемую нами конструкцию и объясняет, почему проводить прямую Штейнера так часто оказывается чем-то важным.

6. Точка X — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC. Треугольник T образован биссектрисами углов ABC, ACB и AXC. Докажите, что
(а) описанная окружность треугольника T проходит через вершину A.
(б) ортоцентр треугольника T лежит на прямой BC.

7. Окружность $\omega$ проходит через центр $O$ и вершину $B$ описанной окружности треугольника $ABC$ и пересекает его стороны $AB$ и $BC$ в точках $D$ и $E$. Докажите, что ортоцентр треугольника $ODE$ лежит на прямой $AC$.

8. **(Теорема Дроз-Фарни)**. Через ортоцентр треугольника проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что середины отрезков, высекаемых ими на сторонах треугольника, лежат на одной прямой.

9. Пусть $ABC$ – остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; $M$ – середина стороны $AB$. В описанной окружности $\Omega$ треугольника $ABC$, проведён диаметр $CC'$. Прямая $CM$ пересекает прямые $AC'$ и $BC'$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Перпендикуляр к прямой $AC'$, проведённый через точку $K$, перпендикуляр к прямой $BC'$, проведённый через точку $L$, и прямая $AB$ образуют треугольник $\delta$. Докажите, что описанная окружность $\omega$ треугольника $\delta$ касается окружности $\Omega$.

10. Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник $ABC$ касается его сторон $AB$, $BC$ и $AC$ в точках $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно. Три мухи ползли по прямым $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ с постоянными скоростями так, что в какой-то момент они находились в точках $A$, $B$ и $C$, а в другой момент были в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$. В некоторый момент времени все три мухи находились на прямой $p_1$, а в некоторый другой момент — на прямой $p_2$. Докажите, что $p_1 \perp p_2$.