Уральский разнобой

1. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ больше 1 , а их произведение равно $n+1$. Докажите, что
$$\left(\frac{1}{1^2\left(x_1-1\right)}+1\right)\left(\frac{1}{2^2\left(x_2-1\right)}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{n^2\left(x_n-1\right)}+1\right) \geqslant n+1.$$

2. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне CD — точка F, причем $AD = DE = AF$ и $BF = CE = EF$. Докажите, что если прямые BC и AD параллельны, то прямая EF параллельна им обеим.

3. Одиннадцать школьников начинают бежать одновременно по часовой стрелке из одной точки кругового стадиона длиной 400 м. Скорости всех учеников постоянны и попарно различны. При этом скорости у любых двух ребят отличаются не более чем на 1 км/ч. Могло ли через 2 часа оказаться, что школьники бегут по кругу в порядке убывания скоростей, считая от точки старта по часовой стрелке?

4. Паша загадал два различных натуральных числа m и n, больших 2025. Затем он выписал в тетрадку в произвольном порядке все значения, которые может принимать сумма остатков от деления натурального числа на m, на n и на mn. Всегда ли Максим сможет отгадать m и n, зная числа в тетрадке Паши?

5. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \ldots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берёт 1 монету, Игорь берёт 2 монеты из разных стопок, затем Саша берёт 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i-ом ходу игрок берёт i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. В остроугольном треугольнике $ABC(AC > BC)$ проведена высота AD и отмечен ортоцентр H, центр описанной окружности O и середина K стороны AB. Внутри треугольника ADC отмечена точка P такая, что $\angle KPD + \angle ACB = 2\angle OPH = 180^\circ$. Докажите, что $BH = 2PD$.