Коники не бесполезны! - листочек с теорией

Алгебраическое определение. Коникой называется множество нулей однородного уравнения степени 2. Коника называется вырожденной (или *распавшейся*), если задающее её уравнение раскладывается на множители.

Определение. Невырожденной коникой называется образ окружности при проективном преобразовании.

Упражнение. Вспомните определение коники как "конического сечения" - пересечения конуса с плоскостью. Убедите себя в том, что это то же самое определение, пересказанное другими словами.

Определение. *Вырожденной* (или *распавшейся*) коникой называется объединение двух прямых или прямая. Во втором случае коника называется "кратной прямой", и правильно думать про неё, как про дважды взятую прямую.

Обратите внимание, что из такого определения мгновенно следует, что в теоремах Паскаля и Брианшона можно заменить окружность на произвольную невырожденную конику.

Определение. Пусть на невырожденной конике выбраны точки A, B, C, D и P. Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D на конике называется двойное отношение четвёрки прямых PA, PB, PC, PD.

Упражнение. Проверьте, что определение двойного отношения четвёрки точек на конике корректно (то есть не зависит от выбора точки P)

Таким образом, занимаясь проецированиями двойных отношений и проективным движением точек, мы, на самом деле, можем взаимодействовать не только с точками, движущимися по прямым и окружностям, но и с точками, двужущимися по произвольным коникам. На первый взгляд не видно, насколько это полезно - не очень понятно, откуда конике вообще взяться. Общая философия тут такая: когда мы думаем про задачу по геометрии, всегда полезно помнить, что наша картинка так или иначе описывается алгебраическими уравнениями. И если точка не очень сложная - то можно надеяться, что и уравнения описывающие её, не такие сложные (например, небольшой степени). А уравнение, задающее конику - это следующее по сложности, что вообще бывает после прямой.
Разумеется, проверять в координатах, что точка движется по конике - это крайне сомнительный план. Он был нужен только для того, чтобы объяснить, почему вообще оправданно ожидать, что коника - распространённая траектория движения точки. На практике же при добавлении к рассмотрению коник количество точек с непонятными траекториями мгновенно уменьшается в разы, а очень просто и наглядно искать и описывать траектории точек позволяет лемма Соллертинского.

Лемма (предварительная). Коника однозначно определяется по пяти точкам плоскости. Если какие-то три из них коллинеарны, то коника распадается.

Лемма (Соллертинского). Пусть прямая l_A вращается вокруг точки A, а прямая l_B вращается вокруг точки B и проективно зависит от неё. Пусть прямые l_A и l_B пересекаются в точке P. Тогда имеет место один из двух случаев:
а) Точка P проективно движется по конике, проходящей через A и B.
б) Существует положение, когда прямая l_A совпадает с прямой l_B. Тогда коника, по которой должна двигаться точка P, вырождается в объединение прямой AB и какой-то прямой l, и точка P проективно движется по l.

Проективная геометрия обладает ещё одной замечательной чертой - наличием к любому утверждению двойственного. Поразительным образом, коники с двойственностью взаимодействуют очень хорошо:

Утверждение (коники и проективная двойственность). При переходе к двойственному пространству, точки коники C становятся семейством прямых, касающихся (огибающих) какую-то конику. Эту конику обозначим за C' и будем называть двойственной к C. Тогда если точка P двигалась по C, и перешла при двойственности в какую-то прямую p, то точка касания p и C' проективно зависит от P.

Двойственная лемма Соллертинского. Пусть точки A и B движутся по прямым a И b и проективно зависят друг от друга. Тогда прямая AB огибает фиксированную конику, касающуюся прямых a и b, или проходит через фиксированную точку.

Наконец, давайте немного поговорим об уже хорошо нам известном частном случае коники - окружности. Про них у нас есть куда больше утверждений и информации, берущихся из их евклидовых свойств. А можно ли как-то на чисто проективном языке понять, что значит, что в данной евклидовой карте нашей проективной плоскости коника оказалась окружностью? Оказывается, что да - и это утверждение приводит к абсолютно другому взгляду на все свойства вписанных четырёхугольников! Для этого нам придётся перейти к рассмотрению *комплексной* проективной плоскости.

Напоминание-определение. До этого мы работали с вещественной проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$, которую определяли как тройки вещественных чисел, определённые с точностью до пропорциональности:

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \sim (\lambda x_0 : \lambda x_0 : \lambda x_0) \quad | \quad (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0:0:0), \quad x_0, x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Комплексная проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$ определяется так же, но теперь мы рассматриваем $x_0, x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{C}$. Обратите внимание, что пропорциональными теперь мы называем те тройки, которые отличаются домножением на какое-то комплексное число.
Нетрудно заметить, что $\mathbb{RP}^2$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{CP}^2$. Более того, любое уравнение с коэффициентами из $\mathbb{R}$ естественным образом можно рассматривать как уравнение над всём $\mathbb{CP}^2$. Таким образом, все объекты на нашей картинке, с которой мы работаем в геометрической задаче, естественным образом продолжается до картинки на комплексной проективной плоскости. Однако $\mathbb{CP}^2$ в чём-то лучше вещественной плоскости - поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то есть любой многочлен степени n имеет в комплексных числах ровно n корней (возможно, кратных). На самом деле отсюда следует, что все оценки на количество точек пересечения двух объектов, которые можно было написать на обычной вещественной проективной плоскости, тут достигают равенства. Общий принцип тут такой: что если утверждение формулировалось на языке уравнений, то при переходе к уравнениям над $\mathbb{C}$ оно не сломается (если тождество было верно как равенство многочленов, то разрешив подставлять в них комплексные числа мы ничего не поменяем). Это позволяет нам, например, проводить рассуждение, опирающееся на существование точки пересечения окружности и прямой, даже если они не пересекаются - их точка будет существовать на $\mathbb{CP}^2$. Или делать проективное преобразование, которое часть "невидимых" точек переведёт в видимые, вещественные: обратите внимание, что проективное преобразование плоскости всё ещё задаётся однозначно по четырём точкам.

Зачем будет нужно $\mathbb{CP}^2$ нам? В вещественном мире окружности не пересекают бесконечно удалённую прямую. Давайте найдём, в каких точках произвольная окружность (задаваемая однородным уравнением $(x_0 - ax_2)^2 + (x_0 - bx_2)^2 = cx_2^2$) пересекает бесконечно удалённую прямую (то есть прямую $x_2 = 0$) на $\mathbb{CP}^2$. Оказывается, это всегда одни и те же две точки - $(i : 1 : 0)$ и $(-i : 1 : 0)$! Нетрудно проверить и обратное утверждение - что если коника проходит через эти две точки, то её уравнение имеет вид уравнения окружности.

Это позволяет дать такую опирающееся только на проективную геометрию характеризацию окружностей:

Равносильная характеризация Окружностью в карте $x_2 = 0$ называется коника, проходящая через точки $\iota_+ = (i : 1 : 0)$ и $\iota_- = (-i : 1 : 0)$.

Таким образом, с точностью до проективного преобразования $\mathbb{CP}^2$ семейство окружностей - это просто семейство коник, проходящее через две фиксированные точки! Это утверждение открывает возможность для интерпретации множества утверждений про окружности как утверждений про коники. Приведём несколько примеров.

Лемма (Фусса?!). Пусть коники C_1 и C_2 пересекаются в точках A, B, C и D. Через A и B проводятся прямые a и b, пересекающие C_1 в точках A_1 и B_1, а C_2 в точках A_2 и B_2 соответственно. Тогда прямые CD, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке.

Лемма (Радикальные оси?!). Пусть коники C_1, C_2 и C_3 проходят через точки A и B. Тогда три прямые три прямые, проходящие по точкам пересечения каждой пары коник, отличным от A и B, пересекаются в одной точке.

Лемма (Опять Фусс?!). Пусть две окружности пересекаются в точках A и B. На одной из них выбрали точки C и D, а на другой - E и F. Тогда $CD \parallel EF$ тогда и только тогда, когда существует коника $ABCDEF$.

Лемма (Наконец-то нормальный признак вписанности четырёхугольника!). Четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда существует коника $ABCD\iota_+\iota_-$

Напоследок поговорим о том, как вообще геометрически что-то понимать про ι_+ и ι_- - их же никак нельзя увидеть! Не в координатах же всё, что понадобится, проверять. Тут помогает подход с различными геометрическими преобразованиями: хотя мы плохо себе представляем, что такое точки ι_+ и ι_-, мы хорошо знаем, где они лежат: на всех окружностях! И с ними можно взаимодействовать, как с "точками пересечения окружностей". Докажем для примера следующее утверждение:

Утверждение. Точки ι_+ и ι_- симметричны относительно любой вещественной прямой l в карте $x_2 = 0$.
Доказательство. Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2 с центрами на l, пересекающиеся в двух вещественных точках A и B. Помимо A и B, так как это окружности, они пересекаются в точках ι_+ и ι_-. Рассмотрим симметрию относительно l. Точки A и B поменяются местами. Окружности перейдут в себя. Значит ι_+ и ι_- либо поменяются местами, либо обе останутся на месте. Но проективное преобразование однозначно задаётся по 4 точкам общего положения, так что если ι_+ и ι_- неподвижны, то добавив к ним две любые не бесконечные точки прямой l мы получим, что осевая симметрия на 4 точках совпадает с тождественным преобразованием. Противоречие. Значит они меняются местами.

Разумеется, вся теория вокруг точек ι_+ и ι_- является уже сильно более редким инструментом. Одним словом, полезно про них помнить - а решать через них задачи у вас скорее всего не получится.