Коники решают задачи!

Как мы с вами обсудили, коники часто оказываются траекториями движения точек, и, более того, при движении точки по конике корректно говорить о *движении с сохранением двойных отношений*.

1. Докажите, что при изогональном сопряжении прямая, не проходящая через вершины треугольника, переходит в конику, проходящую по его вершинам, и наоборот. Куда переходит его описанная окружность? А что, если вместо изогонального сопряжения рассматривать изотомическое?

2. На сторонах треугольника ABC построены как на основаниях во внешнюю сторону подобные равнобедренные треугольники $AC'B$, $BA'C$ и $CA'B$. Докажите, что прямые CC', AA' и BB' пересекаются в одной точке и найдите её ГМТ.

Если мы хотим, чтобы траектория точки находилась Соллертинским, да и в целом была приемлемой - прямые, пересечениями которых она является, в идеале должны вращаться вокруг фиксированных точек. Эта простая мысль часто помогает выбрать, какую именно часть картинки двигать, а какую - зафиксировать.

3. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 провели отрезки общих касательных: A_1A_2 (внешняя) и B_1B_2 (внутренняя) ($A_1, B_1 \in \omega_1$, $A_2, B_2 \in \omega_2$). Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар прямых A_1A_2, B_1B_2 и A_1B_2, A_2B_1, ортогональна линии центров ω_1 и ω_2.

4. **(Теорема Сонда, которую как раз и доказывал Соллертинский)**. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_0B_0C_0$. На плоскости нашлась такая точка S, что

$$AS \perp B_0C_0 \quad BS \perp C_0A_0 \quad CS \perp A_0B_0 \quad A_0S \perp BC \quad B_0S \perp CA \quad C_0S \perp AB$$

Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке или параллельны.
Иными словами, *если два треугольника ортологичны и центры ортологии совпадают, то они перспективны.*

Лемма Соллертинского оказывается полезна в задачах, где нужно найти количество точек с тем или иным свойством - теперь, пересекая разные ГМТ, мы не ограничены прямыми и окружностями!

5. Стол для игры в бильярд имеет форму окружности. Пусть внутри стола отмечены точки P и Q так, что прямая PQ не проходит через центр стола. Какое может существовать наибольшее число способов ударить по шарику, лежащему в точке P так, чтобы он ровно один раз отскочил от границы стола и попал в точку Q? Рукомахания в оценке не принимаются!

6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Обозначим через C_1, D_1, M середины отрезков RC, RD, CD соответственно. Прямые AD_1 и BC_1 пересекаются в точке X. Прямая XM пересекает прямые AC и BD в точках U и V. Докажите, что прямая RX касается окружности (RUV).

7. Точки O, I, H — центры описанной и вписанной окружностей, и ортоцентр треугольника ABC. Прямая AI пересекает повторно описанную окружность треугольника в точке M. Прямая HI пересекает прямую BC в точке D. Прямая DM повторно пересекает описанную окружность треугольника в точке E. Докажите, что описанная окружность треугольника HIE касается прямой OI. *Замените O и H на пару произвольных изогонально сопряжённых в треугольнике точек и докажите более общее утверждение.*

8. *Ду ю спик инглиш?* Let ABC be an acute triangle with altitude $\overline{AH}$, and let P be a variable point such that the angle bisectors k and ℓ of $\angle PBC$ and $\angle PCB$, respectively, meet on $\overline{AH}$. Let k meet $\overline{AC}$ at E, ℓ meet $\overline{AB}$ at F, and $\overline{EF}$ meet $\overline{AH}$ at Q. Prove that as P varies, line PQ passes through a fixed point

9. **(а)** В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отмечены изогонально сопряжённые точки P и Q. Точка W — середина дуги BAC окружности (ABC). Прямые WP и WQ второй раз пересекают окружность (ABC) в точках X и Y соответственно. Через точки P и Q проведены прямые, параллельные прямой AW; этим прямые пересекают стороны AB, AC в точках P_B, P_C , Q_B и Q_C . Докажите, что точки X, Y, PB, PC, QB и QC лежат на одной окружности. **(б)** А когда эта окружность касается окружности ABC? Как можно описать это условие в терминах исключительно точек A, B, C, P и Q? **(в)** *(Для начинающих исследователей)* Придумайте обобщение предыдущих пунктов, убрав условие на параллельность прямых, проведённых через P и Q.

10. Прямая пересекает отрезок AB в точке C. Какое максимальное число точек X может найтись на этой прямой так, чтобы один из углов AXC и BXC был в два раза больше другого?