Теорема Волстенхолма

1. **(а)** Дано простое число $p > 2$. Докажите, что
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \bmod p.$$

(б) Дано простое число $p > 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \bmod p.$$

(в) Дано простое число $p > 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \bmod p^2.$$

2. **Теорема Волстенхолма.** Дано простое число $p > 3$.

(а) Докажите, что $C_{2p}^{p} \equiv 2 \bmod p^3$.

(б) Докажите, что $C_{ap}^{bp} \equiv C_a^b \bmod p^3$ для натуральных a и b.

3. Дано натуральное число s. Докажите, что
$$C_{p^{s+1}}^{p} \equiv p^s \bmod p^{2s+3}.$$

4. Дано простое число $p > 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^p} \equiv 0 \bmod p^3.$$

5. Даны натуральные числа k и m. Оказалось, что для любого простого делителя $p \mid m$ число k не делится на $p-1$. Докажите, что
$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^k} \equiv 0 \bmod m.$$

6. Пусть $p = 4k + 3$ — простое число. Найдите
$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} \bmod p.$$