Бесполезные свойства коник

Один из общих принципов, который стоит помнить, взаимодействуя с эллипсами и гиперболами (и параболами тоже, но там дело обстоит немного хитрее) - это то, что это две грани одной и той же сущности, и почти любое геометрическое свойство эллипса имеет аналог для гиперболы, отличающийся, возможно, тем, что часть картинки «вывернется наизнанку». Сегодня вы неоднократно в этом убедитесь.

Определение. Эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется ГМТ точек с фиксированной суммой расстояний до F_1 и F_2.

1. **(Оптическое свойство эллипса)** Пусть прямая l касается эллипса с фокусами F_1 и F_2 в точке P. Тогда прямая l - это внешняя биссектриса угла F_1PF_2.

2. **(Эллипс и изогонали)** Пусть касательные к эллипсу с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке R. Тогда
   (а) Точки F_1 и F_2 лежат на изогоналях относительно угла PRQ.
   (б) F_1R - биссектриса угла PF_1Q, а F_2R - биссектриса угла PF_2R.

Определение. Гипербола (из древнегреческого: «переход; чрезмерность, избыток; преувеличение») — стилистическая фигура явного и намеренного преувеличения с целью усиления выразительности и подчёркивания сказанной мысли.

3. **(Оптическое свойство гиперболы)** Пусть прямая l касается гиперболы с фокусами F_1 и F_2 в точке P. Тогда прямая l — это внутренняя биссектриса угла F_1PF_2.

4. **(Гипербола и изогонали)** Пусть касательные к гиперболе с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке R. Тогда
   (а) Точки F_1 и F_2 лежат на изогоналях относительно угла PRQ.
   (б) F_1R - биссектриса угла PF_1Q, а F_2R - биссектриса угла PF_2R.

5. Докажите, что эллипс и гипербола, у которых совпадают фокусы, пересекаются под прямым углом (углом между двумя кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения).

6. **(Как представлять себе разные описанные четырёхугольники?)** Пусть даны точки F_1 и F_2. Выберем произвольные точки A и C. Пусть прямые F_1A и F_2C пересекаются в точке B, а прямые F_1C и F_2A — в точке D. Докажите, что окружность, вписанная в ломаную $ABCD$, существует тогда и только тогда, когда существует эллипс или ветвь гиперболы с фокусами F_1 и F_2, проходящая через A и C, и тогда и только тогда, когда существует эллипс или ветвь гиперболы с фокусами F_1 и F_2, проходящая через B и D. Нарисуйте разные картинки для разных коник и расположений точек. Что случится, если одна из точек окажется на прямой F_1F_2? Какое утверждение получится, если отметить не две, а три точки на одной и той же конике с фокусами F_1 и F_2?

7. **(Мне сказали, что окружность из пункта а называется директором эллипса)**
   (а) Прямая F_1F_2 пересекает эллипс с фокусами F_1 и F_2 в точках P и Q. Пусть Γ — окружность, построенная на PQ как на диаметре. Пусть точка X выбрана на Γ. Докажите, что перпендикуляр, восставленный к F_1X в точке X, касается исходного эллипса.
   (б) Пусть теперь окружность Γ просто касается нашего эллипса в двух точках (эллипс лежит внутри неё). Докажите, что существует окружность, проходящая по двум точкам касания Γ с эллипсом, F_1, F_2 и центру Γ.
   (в) Докажите, что существует ориентированный угол ϕ такой, что для любой точки $R \in \Gamma$ прямая, проведённая в точке R под углом ϕ к F_1R, касается исходного эллипса.
   (г) Сформулируйте аналог предыдущих пунктов для гиперболы. Он доказывается в точности так же, но если не верите — я не смогу помешать вам это проверить.

8. **(Заядлые читатели паблика "Олимпиадная геометрия" вспомнят словосочетание "Лемма Фусса для коник", периодически там упоминаемое. Так вот, это НЕ она!)** Пусть даны две окружности α и β, пересекающиеся в точках X и Y, и в "дольку" их пересечения вписан эллипс, дважды касающийся каждой из окружностей. Прямая l_X касается эллипса, отделяет от него точку X и пересекает "дольку" в двух точках. Также прямая l_X пересекает окружность α вне дольки в точке A_1, и пересекает окружность β вне дольки в точке B_1. Аналогично выберем прямую l_Y и определим точки A_2 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

9. Наверняка вы уже сталкивались с утверждением, что если две окружности пересекаются в точках P и Q, то можно запустить из точки P двигающиеся по ним с равными угловыми скоростями точки A и B, и прямая AB всегда будет проходить через точку Q. Пусть теперь стартовые положения точек A и B произвольные где-то на этих окружностях. Опишите кривую, которой будет касаться прямая AB.

10. **Что такое изогональное сопряжение?** Вспомните, что вы знаете о парах изогонально сопряжённых в треугольнике и четырёхугольнике точек (существование, условие, когда они существуют, педальная окружность). Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике/четырёхугольнике тогда и только тогда, когда существует коника с фокусами в этих точках, касающаяся всех сторон треугольника/четырёхугольника. Выведите отсюда все базовые свойства изогонально сопряжённых точек, которые вы вспомнили.

11. Пусть в правильный $2n$-угольник вписан эллипс с фокусом F. Покрасим стороны многоугольника в шахматном порядке. Докажите, что сумма углов, под которыми видны чёрные стороны из F, равна 180°.

12. Пусть хорды AB и CD эллипса проходят через его фокусы F_1 и F_2 соответственно, а прямые AC и BD пересекаются в точке Y. Докажите, что Y лежит на биссектрисе угла между AB и CD.

13. **(Гигагармонический четырёхугольник)** Докажите следующие свойства четырёхугольника $ABCD$, для которого $AB \cdot CD = BC \cdot DA$:
    (а) (Некоторые из вас уже сталкивались с этим утверждением на сборах - в листке на инверсию) Общие внешние касательные к окружностям ABC и CDA пересекаются на прямой BD.
    (б) Существует коника с фокусами на диагоналях AC и BD, касающаяся всех четырёх сторон AB, BC, CD и DA. А как выглядят фокусы этой коники для обычного гармонического четырёхугольника?
    (в) Инверсия в любой точке плоскости оставит гигагармонический четырёхугольник гигагармоническим.
    (г) (очень сложная, но уж больно в тему) Пусть в таком четырёхугольнике существует точка P такая, что $\angle BAP = \angle PCD$ и $PBC = PDA$. Докажите, что тогда точка P имеет изогонально сопряжённую в четырёхугольнике $ABCD$.