

Кузнечик (по имени Кронекер)

1. На бесконечной в одну сторону клетчатой полоске записаны произвольные числа. Докажите, что найдется кусок полоски такой, что сумма чисел в его клетках отличается от целого числа не более, чем на $0,001$.
2. Дано положительное иррациональное число α , меньшее 1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α .
 - (а) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $0,001$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).
 - (б) Докажите, что кузнечик рано или поздно посетит любую наперёд выбранную дугу окружности. Верно ли, что он посетит любую наперёд заданную точку окружности?
 - (в) (**Теорема Кронекера**). Докажите, что если $\alpha > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) числовой прямой содержит число вида $n\alpha - m$, где m, n – неотрицательные целые числа. (Иными словами, множество значений выражения $n\alpha - m$ всюду плотно на числовой прямой).
3. По круглому стадиону длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом α . Стадион разбит на два равных сектора: первый и второй. Судья записывает номера секторов, посещаемых кузнечиком. Докажите, что эта последовательность непериодична.
4. Два кузнечика одновременно начинают прыгать по окружности из одной точки, один — с шагом α , другой — с шагом β . Докажите, что для любого $\epsilon > 0$ рано или поздно оба одновременно окажутся в ϵ -окрестности стартовой точки.
5. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.
6. В каждой точке координатной плоскости с целыми координатами сидит круглый дятел радиуса $r > 0$. У дятла в точке $(0, 0)$ есть ружьё. Докажите, что в каком бы направлении он не стрельнул, пуля попадёт в другого дятла.
7.
 - (а) Докажите, что степень двойки с натуральным показателем может начинаться на любую цифру.
 - (б) Докажите, что степень двойки с натуральным показателем может начинаться на любую комбинацию цифр.