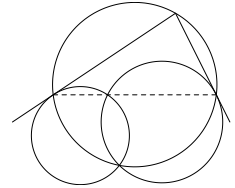


Обобщения прямой Симсона.

1. *Теорема Сальмона.* Через точку на окружности провели три произвольные хорды, на которых как на диаметрах построили окружности. Докажите, что попарные точки пересечений построенных окружностей лежат на одной прямой.
2. (а) *Прямая Штейнера.* Точку P на описанной окружности треугольника ABC симметрично отразили относительно сторон треугольника. Докажите, что полученные таким образом точки лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что прямая Штейнера проходит через ортоцентр треугольника ABC .

3. *Задача с Московского математического кружка, 1910 г.* Два круга, касающиеся сторон угла и пересекающиеся на окружности, проходящей через вершину угла и точки касания кругов, должны второй раз пересекаться на прямой, соединяющей точки касания.



4. (а) *α -прямая Симсона.* Из точки P описанной около треугольника ABC окружности проведены наклонные PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны под равными и одинаково ориентированными углами α . Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

(б) Для точки P и треугольника ABC построим α -прямую Симсона s_α и β -прямую Симсона s_β . Пусть $\alpha > \beta$. Докажите, что угол между прямыми s_α и s_β равен $\alpha - \beta$.

5. *Прямая Симсона вписанного четырехугольника.* Докажите, что проекции точки P описанной окружности четырехугольника $ABCD$ на прямые Симсона треугольников ABC, ABD, ACD, BCD лежат на одной прямой.

6. (а) *Теорема Дроз-Фарни.* Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Докажите, что середины отрезков лежат на одной прямой.

(б) *Обобщение теоремы Дроз-Фарни.* Пусть в треугольнике ABC взята произвольная точка P , а через нее проведена произвольная прямая l . Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на прямых BC, AC, AB таким образом, что прямые A_1P, B_1P, C_1P симметричны относительно прямой l прямым AP, BP, CP , соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.