Комбинаторика в ТЧ.

1. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000.

2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если
   (а) $l = 9$;
   (б) l — нечетное число, не делящееся на 5.

3. Миша выписал в строку 100 последовательных чисел. Во второй строке под каждым числом он написал его собственный делитель. В третьей строке он под каждым числом из второй строки написал его собственный делитель и т. д., пока не получилось 2025 строк. Могло ли так быть, что в каждой строке написаны последовательные числа?

4. Назовем натуральное число N сбалансированным, если или $N = 1$, или N раскладывается в произведение четного количества простых чисел с учетом кратности. Пусть также $P(x) = (x + a)(x + b)$ для некоторых натуральных a и b.
   (а) Докажите, что найдутся такие различные a и b, что все числа $P(1), P(2), \ldots, P(2025)$ сбалансированы.
   (б) Докажите, что если число $P(n)$ сбалансировано при любом натуральном n, то $a = b$.

5. Даны 2025 различных натуральных числа, простые делители которых не больше 23. Докажите, что среди них можно выбрать 4 числа, произведение которых — четвертая степень некоторого натурального числа.

6. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.