[ЦПМ, кружок по математике] Филатов Андрей

[*2024-2025*] группа 10-2 *3 апреля*

Разнобой

1. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Точки I_1, I_2, I — центры вписанных окружностей треугольников ABD, BCD, ABC соответственно. Докажите, что если I — ортоцентр треугольника BI_1I_2, то BD — высота треугольника ABC.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D, что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что $BC = BD$.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC угол B равен 130°. Точка H — основание высоты из вершины B. На сторонах AB и BC нашлись такие точки D и E соответственно, что $DH = EH$ и четырехугольник $ADEC$ вписанный. Найдите $\angle DHE$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На отрезке AC и на продолжении стороны BC за точку C выбираются такие переменные точки X и Y соответственно, что $\angle ABX + \angle CXY = 90^\circ$. Точка T — проекция точки B на прямую XY. Докажите, что все такие точки T лежат на одной прямой.

5. На биссектрисе угла B остроугольного треугольника ABC выбрана точка T. Окружность S, построенная на BT как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Окружность, проходящая через вершину A и касающаяся S в точке P, вторично пересекает прямую AC в точке X. Окружность, проходящая через вершину C и касающаяся S в точке Q, вторично пересекает прямую AC в точке Y. Докажите, что $TX = TY$.

6. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую l, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

7. В треугольнике ABC отмечен центр вневписанной окружности I_A напротив вершины A. Окружность ω проходит через A, I_A и пересекает продолжение отрезков AB, AC (за точки B, C) в точках X, Y соответственно. Пусть S, T - точки на отрезках I_AB, I_AC такие, что $\angle AXI_A = \angle BTI_A$ и $\angle AYI_A = \angle CSI_A$. Прямые BT, CS пересекаются в точке K. Прямые KI_A, TS пересекаются в точке Z. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой.

[ЦПМ, кружок по математике] Филатов Андрей

[*2024-2025*] группа 10-2 *3 апреля*

Разнобой

1. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Точки I_1, I_2, I — центры вписанных окружностей треугольников ABD, BCD, ABC соответственно. Докажите, что если I — ортоцентр треугольника BI_1I_2, то BD — высота треугольника ABC.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D, что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что $BC = BD$.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC угол B равен 130°. Точка H — основание высоты из вершины B. На сторонах AB и BC нашлись такие точки D и E соответственно, что $DH = EH$ и четырехугольник $ADEC$ вписанный. Найдите $\angle DHE$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На отрезке AC и на продолжении стороны BC за точку C выбираются такие переменные точки X и Y соответственно, что $\angle ABX + \angle CXY = 90^\circ$. Точка T — проекция точки B на прямую XY. Докажите, что все такие точки T лежат на одной прямой.

5. На биссектрисе угла B остроугольного треугольника ABC выбрана точка T. Окружность S, построенная на BT как на диаметре, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Окружность, проходящая через вершину A и касающаяся S в точке P, вторично пересекает прямую AC в точке X. Окружность, проходящая через вершину C и касающаяся S в точке Q, вторично пересекает прямую AC в точке Y. Докажите, что $TX = TY$.

6. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую l, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

7. В треугольнике ABC отмечен центр вневписанной окружности I_A напротив вершины A. Окружность ω проходит через A, I_A и пересекает продолжение отрезков AB, AC (за точки B, C) в точках X, Y соответственно. Пусть S, T - точки на отрезках I_AB, I_AC такие, что $\angle AXI_A = \angle BTI_A$ и $\angle AYI_A = \angle CSI_A$. Прямые BT, CS пересекаются в точке K. Прямые KI_A, TS пересекаются в точке Z. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой.