ТЧ

1. Может ли у натурального числа быть чётное число нечётных делителей и нечётное число чётных делителей?
2. Дано натуральное число n и простое число p. Оказалось, что произведение
$$(1^3+1)(2^3+1)\dots\left((n-1)^3+1\right)(n^3+1)$$
делится на p^3. Докажите, что $p \leqslant n+1$.
3. Дано натуральное n. Докажите, что при некотором натуральном m у числа m^3+m ровно один или ровно два различных простых делителя, больших n.
4. По окружности расставлены 9 натуральных чисел $a, b, c, \dots, i$. Все числа $a + b^c, b + c^d, \dots$ — простые. Какое наибольшее количество разных чисел среди $a, b, \dots$ может быть?
5. Все натуральные делители числа $4k$ выписали в порядке возрастания. Докажите, что найдутся два подряд идущих делителя, отличающихся на 2.
6. Даны натуральные числа k и d. Докажите, что существует такое N, что для любого нечётного $n > N$ все цифры в $2n$-ичной записи числа n^k больше чем d.
7. Докажите, что существуют такие натуральные числа m и n, для которых верно
$$\frac{m^2+m+1}{n^2+n+1} = 2025^2 + 2025 + 1.$$

[ЦПМ, кружок по математике] Ю. Г. Арутюнов
[*2024-2025*] группа 10-2 *31 марта*

ТЧ

1. Может ли у натурального числа быть чётное число нечётных делителей и нечётное число чётных делителей?
2. Дано натуральное число n и простое число p. Оказалось, что произведение
$$(1^3+1)(2^3+1)\dots\left((n-1)^3+1\right)(n^3+1)$$
делится на p^3. Докажите, что $p \leqslant n+1$.
3. Дано натуральное n. Докажите, что при некотором натуральном m у числа m^3+m ровно один или ровно два различных простых делителя, больших n.
4. По окружности расставлены 9 натуральных чисел $a, b, c, \dots, i$. Все числа $a + b^c, b + c^d, \dots$ — простые. Какое наибольшее количество разных чисел среди $a, b, \dots$ может быть?
5. Все натуральные делители числа $4k$ выписали в порядке возрастания. Докажите, что найдутся два подряд идущих делителя, отличающихся на 2.
6. Даны натуральные числа k и d. Докажите, что существует такое N, что для любого нечётного $n > N$ все цифры в $2n$-ичной записи числа n^k больше чем d.
7. Докажите, что существуют такие натуральные числа m и n, для которых верно
$$\frac{m^2+m+1}{n^2+n+1} = 2025^2 + 2025 + 1.$$