Клетки

1. На клетках доски 10×10 лежит по алмазу так, что на соседних по стороне клетках веса различны. Докажите, что алмазы можно переложить на клетки доски 2×50 так, чтобы по-прежнему веса на соседних клетках были различны.

2. Дана доска 20×25, горизонтали которой занумерованы числами от 1 до 20, а вертикали — числами от 1 до 25. Никита хочет поместить в некоторые клетки этой доски по одному драгоценному камню так, чтобы на доске находился хотя бы один камень и чтобы выполнялось такое магическое условие: для любых $1 \le i \le 20$ и $1 \le j \le 25$ в клетке, расположенной на пересечении i–й горизонтали и j–й вертикали, находится камень тогда и только тогда, когда в «кресте», являющемся объединением i–й горизонтали и j–й вертикали, находится ровно $i + j$ камней. Выясните, осуществимо ли желание Никиты.

3. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток.

4. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася — 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10 на 10. Сможет ли Вася ему помешать?

5. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

6. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

7. Дано натуральное число $n \ge 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

[Весенние сборы по математике] М. Д. Губина
[2024-2025] группа 10-2 27 марта 2025 г.

Клетки

1. На клетках доски 10×10 лежит по алмазу так, что на соседних по стороне клетках веса различны. Докажите, что алмазы можно переложить на клетки доски 2×50 так, чтобы по-прежнему веса на соседних клетках были различны.

2. Дана доска 20×25, горизонтали которой занумерованы числами от 1 до 20, а вертикали — числами от 1 до 25. Никита хочет поместить в некоторые клетки этой доски по одному драгоценному камню так, чтобы на доске находился хотя бы один камень и чтобы выполнялось такое магическое условие: для любых $1 \le i \le 20$ и $1 \le j \le 25$ в клетке, расположенной на пересечении i–й горизонтали и j–й вертикали, находится камень тогда и только тогда, когда в «кресте», являющемся объединением i–й горизонтали и j–й вертикали, находится ровно $i + j$ камней. Выясните, осуществимо ли желание Никиты.

3. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток.

4. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася — 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10 на 10. Сможет ли Вася ему помешать?

5. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

6. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

7. Дано натуральное число $n \ge 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?