

## Просто разнбой.

1. На сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$  отметили соответственно точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = CL$ . Оказалось, что  $\angle ALK + \angle BKL = 60$ . Докажите, что  $KL = BC$ .
2. Найдите все такие функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых  $f(x^2 - y^2) = x^2 - f(y^2)$ .
3. Петя и Вася играют на доске  $100 \times 100$ . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
4. Вася задумал три натуральных числа с суммой 1003. Вычислив их произведение, Вася заметил, что оно заканчивается на  $N$  нулей. Какое наибольшее значение может принимать  $N$ ?
5. Пусть  $B_0$  и  $C_0$  — середины «меньших» дуг  $AC$  и  $AB$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_B$  имеет центр  $B_0$  и касается стороны  $AC$ . Окружность  $\omega_C$  определяется аналогично. Докажите, что одна из общих внешних касательных к окружностям  $\omega_B$  и  $\omega_C$  проходит через центр вписанной окружности  $ABC$ .
6. Может ли ладья обойти все клетки доски  $10 \times 10$ , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? Считается, что, делая ход длиной в две клетки, ладья не посещает промежуточную клетку.
7. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах ( $k$ -й и  $(k + 1)$ -й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в  $(k - 1)$ -ю и  $(k + 2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)