Разнобой геометрический

1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK = BC$. Пусть P — точка на перпендикуляре, восстановленном к прямой CK в точке K, равноудаленная от точек K и B. Обозначим также через L середину отрезка CK. Докажите, что прямая AP касается описанной окружности треугольника BLP.

2. На стороне BE треугольника ABE выбраны точки C и D так, что $BC = CD = DE$. Точки X, Y, Z и T — центры описанных окружностей треугольников ABE, ABC, ADE и ACD соответственно. Докажите, что T — точка пересечения медиан треугольника XYZ.

3. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC с углом $\angle B = 30^\circ$. Луч BO пересекает отрезок AC в точке K. Точка L – середина дуги OC описанной окружности треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что точки A, B, L, K лежат на одной окружности.

4. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ACB \neq \angle ACD$. На биссектрисе его угла C отмечена точка E, такая что $AE \perp BD$. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону BC. Докажите, что $AB = BF$.

5. Точка M — середина основания AD трапеции $ABCD$, вписанной в окружность ω. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а луч BM пересекает ω в точке K. Описанная окружность треугольника PBK пересекает прямую BC в точке L. Докажите, что $\angle LDP = 90^\circ$.

6. На биссектрисе угла B треугольника ABC (внутри треугольника) выбрана точка L, а на отрезке BL выбрана точка K. Известно, что $\angle KAB = \angle LCB = \alpha$. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $AP = PC$ и $\angle APC = 2\angle AKL$. Докажите, что $\angle KPL = 2\alpha$.

7. На диагонали $ABCD$ нашлась такая точка P, лежащая внутри треугольника ABD, для которой

$$\angle ACD + \angle BDP = \angle ACB + \angle DBP = 90^\circ - \angle BAD.$$

Докажите, что либо $\angle BAD + \angle BCD = 90^\circ$, либо $\angle BDA + \angle CAB = 90^\circ$.