

Окружность Аполлония.

1. *Окружность Аполлония.* Дан отрезок AB и положительное число k . Докажите, что при $k \neq 1$ ГМТ X , таких что $\frac{AX}{BX} = k$ — это окружность.
2. Пусть Ω — окружность Аполлония для точек A и B , причем точка A лежит вне окружности Ω . Из точки A проведены касательные AP и AQ к окружности Ω . Докажите, что B — середина отрезка PQ .
3. Пусть Ω_c — окружность Аполлония вершин A и B треугольника ABC , для точек X которой выполнено $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$. Докажите, что Ω_c ортогональна описанной окружности треугольника ABC .
4. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.
5. Углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC , а луч OB — с OD . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F . Доказать, что углы $\angle AOE$ и $\angle DOF$ равны.
6. В треугольнике ABC проведены три окружности Аполлония (для каждой пары вершин). Докажите, что:
 - (а) они имеют ровно две общие точки (*точки Аполлония*).
 - (б) проекции каждой точки Аполлония на стороны треугольника образуют правильный треугольник
 - (в) прямая, соединяющая точки Аполлония, проходит через центр описанной окружности треугольника.
7. Внутри треугольника ABC отметили точку P . Прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках K, L, M соответственно. Касательная к окружности (ABC) в точке C пересекает AB в точке S . Докажите, что $SC = SP$ тогда и только тогда, когда $MK = ML$.