Разнобой к ММО.

1. По целому числу a построим последовательность

$$a_1 = a, a_2 = 1 + a_1, a_3 = 1 + a_1 a_2, a_4 = 1 + a_1 a_2 a_3, \ldots$$

(каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседних членов $(a_{n+1} - a_n)$ — квадраты целых чисел.

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, вписанная в треугольник ABD окружность касается сторон AB и AD соответственно в точках M и N, вписанная в треугольник ACD окружность касается сторон AD и DC соответственно в точках P и Q. Доказать, что прямые MN и PQ перпендикулярны.

3. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая конечное число чёрных?

4. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

5. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических из m, причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S. Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?