Точки Брокара

Точкой Брокара треугольника ABC называется такая точка P, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP = \phi$. Угол ϕ называется *углом Брокара* треугольника.

1. Докажите, что точка Брокара существует и единственна.

2. В треугольник ABC. На его сторонах вне треугольника построим со- ответственно подобные ему треугольники $CA'B, CAB', C'AB$ той же ориентации.

(a) Докажите, что окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в точке P.

(b) Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в точке P.

3. Отметим в треугольнике ABC точку Q, что $\angle CBQ = \angle BAQ = \angle ACQ = \psi$ (кстати, почему мы это можем сделать?). Докажите, что $\psi = \phi$, т.е. точки Брокара изогонально сопряжены относительно треугольника.

4. Докажите, что педальный треугольник точки P подобен треугольнику ABC. (Вершинами педального треугольника по определению являются проекции точки P на прямые BC, CA, AB).

5. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC.

(a) Докажите, что треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ равны.

(b) Докажите, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\phi$, где O — центр окружности (ABC).

6. Пусть P и Q — точки Брокара треугольника ABC. Прямые CP и BQ, AP и CQ, BP и AQ пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точки P и Q. *Треугольник $A_1B_1C_1$ называют треугольником Брокара.*

7. Углы треугольника ABC обозначены через α, β, γ. Докажите, что

(a) $sin(3\phi) = sin(\alpha - \phi) sin(\beta - \phi) sin(\gamma - \phi)$;

(b) $ctg(\phi) = ctg(\alpha) + ctg(\beta) + ctg(\gamma)$.

8. Отрезок AS — симедиана треугольника ABC. Докажите, что прямые SP и SQ симметричны относительно прямой BC.

9. Обозначим через L точку Лемуана треугольника ABC (то есть точку пересечения симедиан). Точка O — центр окружности (ABC). Докажите, что точки P и Q лежат на окружности, построенной на отрезке OL как на диаметре.