

Полуописанная окружность

Окружность, проходящую через две вершины треугольника и касающуюся его вписанной окружности, будем называть *полуописанной*. Задача (1) даёт удобный способ построения такой окружности и используется в остальных задачах в качестве леммы.

1. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается стороны BC в точке A_1 . Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T . Точка S – середина дуги BC окружности Ω_A , не содержащей точку T . Точка I_A – центр A -внеописанной окружности треугольника ABC .
 - (a) Докажите, что точки S, A_1, T коллинеарны.
 - (b) Докажите, что точки I_A, S, A_1 коллинеарны.
2. Вписанная окружность ω касается сторон CA, AB треугольника ABC в точках B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T .
 - (a) Докажите, что окружность (TC_1B) проходит через A -эксцентр I_A треугольника ABC .
 - (b) (в сторону) Окружность (TC_1B) пересекает прямую BC в точках B и R . Докажите, что $CR = CB_1$.
3. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C и касается окружности ω в точке T .
 - (a) Докажите, что окружность (TCA_1) проходит через середину отрезка A_1C_1 .
 - (b) Касательная к окружности ω в точке T пересекает прямую BC в точке X . Докажите, что точка X и середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 лежат на одной прямой.
 - (c) Обозначим через M и N середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BM, CN и A_1T пересекаются в одной точке.
4. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C треугольника ABC и касается вписанной окружности в точке T_A . Аналогично определены окружности Ω_B, Ω_C и точки T_B, T_C . Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C имеют общую точку.
5. Вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность Ω_A проходит через вершины B и C , касается окружности ω в точке T и пересекает отрезки AB, AC вторично в точках P и Q соответственно. Обозначим через M и N середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Прямые TM и TN второй раз пересекают окружность Ω_A в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX, QY, MN и AI пересекаются в одной точке.