Рекурренты. Алгебра.

1. Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0 \big(\text{для всех целых } n \geqslant 0\big),$$

а также начальными членами a_0, a_1. Предположим, что квадратное уравнение $x^2 + p_1 x + p_0 = 0$ имеет два различных корня λ_1, λ_2.

(а) Проверьте, что для любых чисел c_1, c_2 последовательность $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ удовлетворяет условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0.$$

(б) Докажите, что любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,$$

обязательно имеет вид $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ для некоторых чисел c_1, c_2.

2. В обозначениях предыдущей задачи предположим, что квадратное уравнение $x^2 + p_1 x + p_0 = 0$ имеет один корень λ (кратности 2).

(а) Проверьте, что для любых чисел c_1, c_2 последовательность $a_n = \left(c_1 n + c_2\right)\lambda^n$ удовлетворяет условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0.$$

(б) Докажите, что любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,$$

обязательно имеет вид $a_n = \left(c_1 n + c_2\right)\lambda^n$ для некоторых чисел c_1, c_2.

3. С помощью задач 1,2 найдите формулу общего члена последовательности

(а) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;

(б) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$;

(в) $b_1 = 2, b_2 = 12, b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$.

4. Найдите остаток от деления на 4 целого числа $\left(3+\sqrt{7}\right)^{2024} + \left(3-\sqrt{7}\right)^{2024}$

5. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.

6. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.

7. Последовательность $\{a_i\}$ задана рекурентно: $a_0 = a, a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. При каких значениях a последовательность является монотонно возрастающей?

8. Дано натуральное число n. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число

$$\left\lfloor \left(3+\sqrt{11}\right)^{2n-1} \right\rfloor.$$