

## Графические последовательности

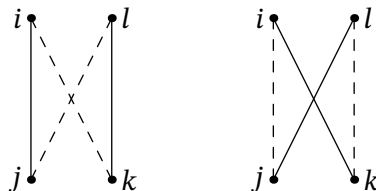
Список степеней вершин простого графа, упорядоченный по невозрастанию, будем называть его *степенной последовательностью*.

Последовательность  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  называется *графической*, если существует граф на  $n$  вершинах с такой последовательностью степеней вершин.

- (а) Приведите примеры двух разных графов с одинаковыми степенными последовательностями.

(б) Докажите, что существуют ровно 5 графов, у которых последовательность степеней вершин равна последовательности  $2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$ .
- Приведите пример последовательности с четной суммой, не являющейся графической.

Пусть в графе есть вершины  $i, j, k, l$  такие, что пары  $(i, j)$  и  $(k, l)$  соединены ребром, но пары  $(i, k)$  и  $(j, l)$  не соединены ребром. Тогда *переключением* назовем операцию, при которой мы убираем ребра в парах  $(i, j)$  и  $(k, l)$  и соединяем ребрами  $(i, k)$  и  $(j, l)$ .



**Теорема.** Любые два графа с одинаковыми степенными последовательностями приводятся один к другому с помощью последовательности переключений.

- Пусть вершины графа занумерованы числами  $1, 2, \dots, n$  так, что  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . Докажите, что для каждой вершины  $i$  существует такая последовательность переключений, что вершина  $i$  соединена с  $d_i$  вершинами наибольшей степени.
- Докажите теорему.

Пусть  $d = \{d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n\}$  — последовательность. Обозначим через  $d^i$  последовательность, полученную вычеркиванием  $i$ -ого члена и уменьшением первых  $d_i$  членов на 1.

- (теорема Хавела-Хакими) Докажите, что

(а) если для некоторого  $i$  последовательность  $d^i$  является графической, то и  $d$  — графическая последовательность;

(б) если последовательность  $d$  графическая, то каждая последовательность  $d^i$  является графической.

6. (теорема Эрдёша-Галлаи) Последовательность  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  является графической тогда и только тогда, когда

- $d_1 + d_2 + \dots + d_n$  — четное;
  - Для каждого  $1 \leq k \leq n-1$  верно неравенство  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$ .
7. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?