

Стандартные точки

1. I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Окружность, проходящая через I , касается сторон AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что отрезок XY касается вписанной в треугольник ABC окружности.
2. AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC . Точки K и M – середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L . Докажите, что точки A, K, L и B_1 лежат на одной окружности.
3. Точка O – центр вписанной окружности треугольника ABC , точка D – середина стороны AB . Известно, что угол AOD – прямой. Докажите равенство $AB + BC = 3AC$.
4. Два треугольника имеют общую вписанную и общую описанную окружности. Стороны одного из них касаются вписанной окружности в точках K, L и M , стороны другого – в точках K_1, L_1 и M_1 . Докажите, что треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ имеют общий ортоцентр.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . На стороне BC взята точка K , для которой $\angle BB_1K = \angle A$, а на стороне AB точка M , для которой $\angle BB_1M = \angle C$, L – точка пересечения высоты BB_1 и отрезка A_1C_1 . Докажите, что четырехугольник B_1KLM описанный.
6. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка K такова, что описанные окружности треугольников BHK и CHK касаются прямой BC . Точка D – основание высоты, опущенной из вершины B на сторону AC . Докажите, что точка A равноудалена от прямых KB и KD .
7. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AB = AP = BQ = 1$, а точка пересечения отрезков AQ и BP лежит на вписанной окружности треугольника ABC . Найдите периметр треугольника ABC .