

## Картинки с «ушками»

*Довольно часто в этом листочке полезно сделать поворот или несколько поворотов.*

1. В равностороннем треугольнике  $ABC$  отмечены середины сторон:  $B_1$  — середина  $AB$ ,  $C_1$  — середина  $BC$ ,  $A_1$  — середина  $AC$ . Во внешнюю сторону от треугольника  $ABC$  построены равносторонние треугольники  $AA_1A_2$ ,  $BB_1B_2$  и  $CC_1C_2$ .
  - (а) Докажите, что треугольник  $AC_1B_2$  — равносторонний.
  - (б) Докажите, что треугольник  $A_2B_2C_2$  — равносторонний.
2. На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены правильные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ .
  - (а) Докажите, что длины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  равны.
  - (б) Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
  - (в) Докажите, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $T$ .
  - (г) Докажите, что сумма расстояний от точки  $X$  до вершин треугольника минимальна тогда и только тогда, когда  $X = T$ .
  - (д) Докажите, что центры построенных треугольников образуют правильный треугольник.
3. На сторонах  $AB$  и  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  построены квадраты  $ABPQ$  и  $ACMN$ .
  - (а) Докажите, что медиана треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины  $A$ , перпендикулярна прямой  $QN$ .
  - (б) Докажите, что центры квадратов и середины отрезков  $BC$  и  $QN$  образуют квадрат.
  - (в) Пусть  $X$  — центр квадрата, построенного на стороне  $BC$  вовне треугольника  $ABC$ . Докажите, что отрезки  $AH$ ,  $PM$ ,  $QC$ ,  $BN$  пересекаются в одной точке.
4. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.
5. На сторонах выпуклого четырехугольника с равными диагоналями во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных треугольников, перпендикулярны.