

## Линейные рекурренты. Добавка

1. Археолог нашёл  $k$  золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них всё-таки фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы. Если левая чаша перевесит, то надо заплатить 2 фунта, а при любом другом исходе — 1 фунт. При каком наибольшем  $k$  можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?
2. Обозначим  $d_n$  количество перестановок  $\sigma$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , для которых неравенство  $|\sigma(k) - k| \leq 2$  выполнено при всех  $1 \leq k \leq n$ . Найдите линейное рекуррентное соотношение конечного порядка, которому удовлетворяет последовательность  $d_n$ .
3. Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}$ , заданную соотношениями

$$a_1 = 20, a_2 = 30, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \text{ для } n \in \mathbb{N}.$$

Найдите все значения  $n$ , при которых число  $1 + 5a_n a_{n+1}$  является точным квадратом.

4. Рассмотрим множество всех последовательностей, удовлетворяющих сразу двум линейным рекуррентным соотношениям конечного порядка. Докажите, что это есть множество последовательностей, удовлетворяющих некоторому одному линейному рекуррентному соотношению.