Двусвязность

Определение. Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G теряет связность. Граф G называется *двусвязным*, если он связен и сохраняет связность при удалении любой вершины.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

1. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Докажите, что

(а) множества вершин блоков B_1 и B_2 пересекаются не более чем по одной вершине;

(б) если B_1 и B_2 пересекаются ровно по одной вершине, то эта вершина — точка сочленения.

Определение. Пусть $B_1, \dots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \dots, a_m$ — все точки сочленения графа G. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \dots, B_n$, $a_1, \dots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

2. Докажите, что **(а)** дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем **(б)** все его висячие вершины соответствуют блокам.

3. Докажите, что утверждения ниже эквиваленты двусвязности графа G (в G более 2 вершин):

(а) для любых трех вершин A, B, C существует простой путь от A до B, не содержащий C;

(б) **(Теорема Менгера)** любые две вершины G лежат в общем простом цикле;

(в) любая вершина и ребро лежат в общем простом цикле;

(г) любые два ребра лежат в общем простом цикле.

4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов. Пусть G — связный граф с блоками $B_1, \dots, B_n$. Докажите, что

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

5. В стране 100 городов, соединённых друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на две провинции, по 50 городов в каждой, так, что в обеих провинциях из любого города можно проехать в любой другой.

6. В некотором государстве было 2025 городов, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2025.