Шалтай-Болтай

1. *Точкой Шалтая*, соответствующей вершине A треугольника ABC называется вторая точка пересечения окружностей, касающихся BC в точках B и C соответственно и проходящих через A. Обозначим её $Ш_a$. Докажите,
(а) что $Ш_a$ лежит на медиане AM_a,
(б) что отражения $Ш_a$ относительно BC и относительно M_a лежат на описанной окружности,
(в) что $Ш_a$ — проекция ортоцентра H на медиану AM_a,
(г) что $Ш_a$ — центр поворотных гомотетий, переводящих высоты BH_b и CH_c друг в друга,
(д) что отражение $Ш_a$ относительно BC дополняет ABC до гармонической четвёрки,
(е) что $Ш_a$ лежит на окружности Аполлония треугольника ABC, соответствующей точке A,
(ё) что прямые $HШ_a, BC, H_bH_c, AШ_H$, где $Ш_H$ — точка Шалтая треугольника BHC, пересекаются в одной точке.
(ж) что четырёхугольник $BM_aH_BШ_H$, пятиугольник $HMШ_aШ_bШ_c$ (где M — точка пересечения медиан) и шестиугольник $AHШ_aШ_HH_bH_c$ вписаны.

2. Чевианы BB_1 и CC_1 пересеклись в точке X. Оказалось, что четырёхугольник AB_1C_1X вписан в какую-то окружность. Докажите, что тогда на ней лежит и точка Шалтая.

3. *Точкой Болтая*, соответствующей вершине A треугольника ABC называется вторая точка пересечения окружностей, касающихся AB и BC в точке A и проходящих через B и C соответственно. Обозначим её $Б_a$. Докажите,
(а) что $Б_a$ лежит на симедиане AS_a (S_a лежит на описанной окружности),
(б) что $BCБ_aO$ (где O — центр описанной окружности) вписан,
(в) что $Б_a$ — проекция O на AS_a,
(г) что $Б_a$ — центр поворотных гомотетий, переводящих стороны AB и CA друг в друга,
(д) что $Б_a$ изогонально сопряжена $Ш_a$,
(е) что точки O, L (точка Лемуана, пересечение симедиан), $Б_a$, $Б_b$ и $Б$ лежат на одной окружности. (Ещё на ней лежат точки Брокара, но это доказывать не нужно),

4. Пусть окружность проходящая через B, C и O пересекает стороны AB и AC в точках B_1 и C_1. Докажите, что точка Шалтая треугольника B_1AC_1 совпадает с точкой Болтая треугольника ABC.

5. Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, B_0 — точка пересечения высоты из вершины B и описанной окружности треугольника ABC. Q — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_0C_1$. Докажите, что BQ — симедиана треугольника ABC.

6. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD соответственнро гармонического четырёхугольника, вписанного в окржуность Ω. Прямые AN и DM вторично пересекают Ω в точках X и Y. Докажите, что $XY \parallel AD$.

7. Основание AD вписанной в окружность Ω трапеции в два раза больше, чем основание BC. Касательные к Ω в точках A и C пересеклись в точке X. Докажите, что (ABX) касается AC, а (BCX) — AX.

8. Пусть точка M – середина катета AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A. На медиане AN треугольника AMC отмечена точка D, так что углы ACD и BCM равны. Докажите, что угол DBC также равен этим углам.

9. Дан неравностороний треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, AC и AB таким образом, что $\angle AA_1B = \angle BB_1C = \angle CC_1A$. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 пересекаются в точке X. Докажите, что точка X лежит на окружности с диаметром HM, где точки H и M соответственно ортоцентр и центроид треугольника ABC.

10. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть ω — его описанная окружность, точка M — середина стороны BC, P — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и ω, T — точка пересечения касательных к ω, проведённых в точках B и C, S — точка пересечения AT с ω. Докажите, что P, A_1, S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.