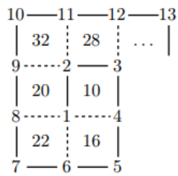
[ЦПМ, кружок по математике] Ю. Г. Арутюнов

[*2024-2025*] группа 10-1 *13 февраля 2025 г.*

Комбинаторный разнобойчик

1. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа $1, 2, 3 \dots$ (см. рисунок). Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах. Докажите, что для любого натурального n в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на n.



2. Серёжа и Таня собираются показать Маше следующий фокус. Серёжа выходит из комнаты. Маша выписывает последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где все a_k равны 0 или 1. После этого Таня выписывает последовательность $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, где все b_k тоже равны 0 или 1. Далее Маша либо ничего на делает, либо говорит «Мутабор!» и заменяет обе последовательности: свою — на последовательность $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$, а последовательность Тани — на $(1 - b_n, 1 - b_{n-1}, \dots, 1 - b_1)$. Последовательность Маши закрывают салфеткой, а в комнату приглашают Серёжу. Серёжа, посмотрев на последовательность Тани, должен назвать последовательность, закрытую салфеткой. Для каких n Серёжа и Таня, подготовившись заранее, смогут показать такой фокус? От Серёжи не требуется определять, была ли проведена операция «Мутабор».

3. Крош нарисовал выпуклый 100-угольник и провёл в нём все диагонали. Пришёл Ежик и заметил, что ни в какой точке кроме вершин 100-угольника не пересеклось больше двух отрезков! Тут уже подошёл Бараш и задумался, сколькими способами он может обвести карандашом часть имеющихся на рисунке линий так, чтобы получился треугольник (не обязательно состоящий из целых диагоналей и, быть может, содержащий не обведённые внутри себя линии)? Помогите ему ответить на этот вопрос!

4. Надо напечатать, а потом сшить 100 книг. Есть один принтер и один сшивающий станок. У каждой книги есть время печати и время сшивания. Известно, что для любых двух книг хотя бы одну из них печатать не дольше чем сшивать другую. Докажите, что можно печатать книги в таком порядке, что сшивающий станок не будет простаивать после того, как напечатает первую книгу.

5. Два человека играют в игру. Имеется $n > 2$ куч, в каждой из которых лежит $n^{10} + 1$ камней. За один ход можно убрать все кучи, кроме одной, а оставшуюся кучу разделить на n непустых куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

6. Султан собрал 300 мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?