Выход в пространство

1. Используя выход в пространство, докажите лемму о трех хордах: «На плоскости даны три попарно пересекающихся круга так, что пересечение всех трех кругов не пусто. К каждой паре кругов проведена общая хорда. Тогда эти три хорды пересекаются в одной точке».

2. На плоскости проведены: три параллельные прямые. Даны три точки, не лежащие на одной прямой, и не принадлежащие ни одной из данных прямых. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны (или их продолжения) содержат заданные точки.

3. **(а)** Через центр равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая отрезки AB и AC в точках D и E соответственно. Точка S плоскости такова, что $BE = SE$ и $CD = SD$. Докажите, что расстояние от точки S до прямой l не зависит от выбора прямой.

   (б) На сторонах BC и AC правильного треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

   (в) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q таким образом, что $CP + CQ = AB$. Отрезки AP и AQ пересекают диагональ BD в точках X и Y. Докажите, что из отрезков BX, XY, YD можно составить треугольник, один из углов которого равен 60°.

4. На плоскости даны четыре прямые общего положения. По каждой прямой с постоянной скоростью идёт пешеход. Известно, что первый встречается со вторым, с третьим и с четвёртым, а второй встречается с третьим и с четвёртым. Доказать, что третий пешеход встретится с четвёртым.

5. *Теорема Брианшона.* Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

   (а) Пусть $ABCDEF$ — данный описанный шестиугольник. Докажите, что существует пространственный шестиугольник, проходящий через точки касания $ABCDEF$ с его вписанной окружностью, проекцией которого на плоскость ABC будет шестиугольник $ABCDEF$ (пространственным многоугольником назовём замкнутую несамопересекающуюся ломаную в пространстве. В задаче требуется найти пространственный шестиугольник, не лежащий в одной плоскости).

   (б) Докажите теорему Брианшона.

6. Используя выход в пространство, постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.