Неравенство Гёльдера

1. **(а)** Докажите, что если три набора $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ неотрицательных вещественных чисел удовлетворяют соотношениям $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = 1$, то тогда
$$1 \geqslant \sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \ldots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n}.$$
(б) Докажите **неравенство Гёльдера** для любых трёх наборов $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ неотрицательных вещественных чисел:
$$(a_1 + a_2 + \ldots a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \geqslant \left(\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \ldots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n}\right)^3.$$
Аналогичное неравенство справедливо и для бóльшего числа наборов.

2. Не раскрывая никаких скобок, для любых положительных чисел a, b, c докажите
$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geqslant (ab + bc + ca)^3.$$

3. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что
$$\frac{a}{\sqrt[3]{a + 2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b + 2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c + 2a}} \geqslant 1.$$

4. Даны неотрицательные вещественные числа x, y, z с суммой 3. Докажите
$$\sqrt{\frac{x}{1 + 2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1 + 2zx}} + \sqrt{\frac{z}{1 + 2xy}} \geqslant \sqrt{3}.$$

5. Для положительных a, b, c, d верно $(a^3 + b^3)^4 = c^3 + d^3$. Докажите, что $a^4 c + b^4 d \geqslant cd$.

6. Даны положительные числа x, y, z с соотношением $xy + yz + zx = 3$. Докажите
$$\frac{x}{\sqrt{x + y}} + \frac{y}{\sqrt{y + z}} + \frac{z}{\sqrt{z + x}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите неравенство
$$\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 6y} + \sqrt[3]{\frac{1}{y} + 6z} + \sqrt[3]{\frac{1}{z} + 6x} \leqslant \frac{1}{xyz}.$$

8. Докажите, что для произвольных положительных чисел a, b, c выполнено
$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b + c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c + a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a + b)^3}} \geqslant 1.$$