

Кярбод

1. Срединные перпендикуляры к сторонам AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на диагонали AC , а к сторонам BC и DA - на диагонали BD . Докажите, что $ABCD$ - прямоугольник.
2. Пусть P - проекция ортоцентра H треугольника ABC на биссектрису его угла ABC , а M - середина стороны AC . Докажите, что прямая MP делит отрезок BH пополам.
3. В треугольнике ABC O - центр описанной окружности, а I - инцентр. Точки P и Q таковы, что $AIOP$ и $ICQO$ - равнобокие трапеции с основаниями AI и IC соответственно. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки B .
4. Пусть O - центр описанной окружности треугольника ABC . Точки P и Q выбраны на отрезках CA и AB соответственно. Окружность ω проходит через середины отрезков BP , CQ и PQ . Оказалось, что прямая PQ касается ω . Докажите, что $OP = OQ$.
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны углы A и C . Точку A отразили относительно прямых BC и CD и получили точки E и F соответственно. Прямые AE и AF пересекают прямую BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружности (BPE) и (QFD) касаются.
6. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность Ω , пересекаются в точке P . Окружность ω касается отрезков AP и PD в точках Q и R соответственно и окружности Ω в точке X . Докажите, что точка X лежит на радикальной оси окружностей ARC и BQD .