Разнобой по алгебре

1. Артемий задумал три простых числа q_1, q_2, q_3 и заметил, что
$$q_1^4 - 1 \vdots q_2q_3, \quad q_2^4 - 1 \vdots q_3q_1, \quad q_3^4 - 1 \vdots q_1q_2.$$
Чему могут быть равны q_1, q_2, q_3?

2. На доску выписаны все натуральные числа от 1 до k. Маша хочет разбить все выписанные числа на две группы и записать в тетрадку числа каждой группы подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа. Существует ли такое k, при котором Маша сможет справиться с этой задачей?

3. В каждой вершине правильного 100-угольника записали по одному натуральному числу, причём все записанные числа различны. Вадим разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; оказалось, что остатки, полученные Вадимом, принимают всего два различных значения. Лена разделила каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Леной, различны.

4. Найти все функции, определённые на множестве всех действительных чисел, принимающие значения в нём же, и удовлетворяющие соотношению:
$$f((x-y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$$
для всех x и y.

5. Найти такие отличные от нуля неравные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ разлагалось в произведение двух многочленов (ненулевой степени) с целыми коэффициентами.

6. На доске написаны $N \geqslant 9$ различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдётся такое девятое, отличное от них, что сумма этих девяти чисел целая. При каких N это возможно?

7. Найти все натуральные n, для которых все натуральные числа от 1 до n включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n-k$ оставшихся, либо делиться на нее при любом k от 1 до $n-1$.

8. Какие натуральные числа n можно представить в виде $n = [a,b]+[a,c]+[b,c]$ для некоторых натуральных a, b, c? Здесь $[x,y]$ — НОК натуральных чисел x и y.