Комбинаторный разнобой

1. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 668.

2. На доске 8×8 стоят 50 фишек. Если в каком-то квадрате 2×2 стоит всего одна фишка, то её можно убрать. Докажите, что за несколько таких ходов убрать все фишки с доски не удастся.

3. Правильный многоугольник разрезали непересекающимися диагоналями на меньшие многоугольники так, что у всех многоугольников разбиения поровну сторон, причём число сторон нечётно. Может ли так оказаться, что хотя бы у одного многоугольника разбиения есть параллельные стороны?

4. Клетчатая доска $2m \times 2n$ раскрашена в шахматную раскраску. Сколькими способами можно поставить на белые клетки такой доски mn фишек так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?

5. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

   После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

   (а) Придумайте стратегию, которая гарантирует всем студентам оценку «сдал».

   (б) Докажите, что эта стратегия единственная.

6. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k - 1$ клеток.) Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что есть непропрыгиваемое число, большее 50.

7. На окружности зафиксировано $2n$ различных точек, $n > 1$. Их разбили на пары и соединили точки в каждой паре стрелкой. Полученная конфигурация называется хорошей, если в ней никакие две стрелки не пересекаются и нет двух стрелок AB и CD, ориентированных таким образом, что в $ABCD$ стороны ориентированы по часовой стрелке. Сколько существует хороших конфигураций?