Разнобой по комбинаторике

1. Есть куб. Первый красит три его ребра в красный цвет, потом второй красит ещё три ребра в синий цвет, потом первый красит три ребра в красный, потом второй — оставшиеся три ребра в синий. Каждое ребро красить можно только один раз. Выигрывает тот, кому удалось покрасить в свой цвет рёбра одной грани и не дать сделать того же сопернику. Кто выигрывает?

2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?

3. В олимпиаде принимало участие семеро школьников, каждый из которых получил от 0 до 11 баллов. Докажите, что можно выбрать два непересекающихся множества школьников, в которых поровну ребят, и в которых суммы набранных баллов равны.

4. В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

5. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

   После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

   (а) Придумайте стратегию, которая гарантирует всем студентам оценку «сдал».

   (б) Докажите, что эта стратегия единственная.