Алгебраический разнобой

1. Докажите, что натуральное число вида n^4+1 может иметь больше 1000 делителей вида a^4+1 с натуральными a.

2. Многочлены F и G таковы, что $F(F(x)) > F(G(x)) > G(G(x))$ для всех вещественных x. Докажите, что $F(x) > G(x)$ для всех вещественных x.

3. Даны вещественное число $y > 1$ и натуральное число $n \leqslant y^{50}$, у которого все простые делители не превосходят y. Докажите, что n можно разложить в произведение 99 натуральных множителей (не обязательно простых), каждый из которых не превосходит y.

4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

5. Положительные a, b, c таковы, что $\frac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant a+b+c$.

6. Про натуральные числа x, y известно, что $x^2-y^3=17$. Докажите, что число y^2+2x+2 — составное.

7. Найдите все натуральные k, для которых существует квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, где a не делится на k, принимающий при целых x все возможные остатки при делении на k.

8. Даны два квадратных трёхчлена f и g с целыми коэффициентами. Оказалось, что для каждого натурального n существует целое число k такое, что $\frac{f(k)}{g(k)}=\frac{n+1}{n}$. Докажите, что трехчлены f и g имеют общий корень.