Дистанционная диагностическая работа. Решения.

1.1. У многочлена $f(x) = x^3 + x^2 + a$ имеется три корня, один из которых равен среднему арифметическому двух других. Чему может быть равно a? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответ: $-\frac{2}{27}$.

Решение: Пусть корни $f(x)$ это $t-d, t$ и $t+d$. Тогда по теореме Виета

$$-(t-d)t(t+d) = a$$

$$t(t-d) + t(t+d) + (t-d)(t+d) = 0$$

$$(t-d) + t + (t+d) = -1.$$

Из третьего равенства получаем, что $t = -\frac{1}{3}$, из второго, что $3t^2 = d^2$, т.е. $d^2 = \frac{1}{3}$. Подставляя это в выражение $-t(t^2-d^2)$ получаем, что $a = -\frac{2}{27}$.

1.2. У многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + a$ имеется три корня, один из которых равен среднему арифметическому двух других. Чему может быть равно a? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответ: $\frac{2}{27}$.

1.3. У многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 + a$ имеется три корня, один из которых равен среднему арифметическому двух других. Чему может быть равно a? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответ: $-\frac{16}{27}$.

1.4. У многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + a$ имеется три корня, один из которых равен среднему арифметическому двух других. Чему может быть равно a? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответ: $\frac{16}{27}$.

2.1. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{60}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 59$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 57$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{42} = 7$.

Ответ: 420.

Решение: Пусть $|a_i - a_{i+1}| = d$, $a_1 = a$. Тогда ясно, что $a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d$. Также заметим, что из того, что сумма $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех i, то получается, что $a_i = a_{i+4}$. Тогда $a_3 = a + 2d$, а $a_5 = a_1 = a$. Тогда ясно, что $a_4 = a + d$.

Тогда последовательность a_i чисто периодична с периодом $a, a+d, a+2d, a+d$. В частности $a_{42} = a + d$. Тогда сумма всех членов последовательности равна $15(a + (a+d) + (a+2d) + (a+d)) = 60(a+d) = 420$.

2.2. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{80}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 79$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 77$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{58} = 11$.

Ответ: 880.

2.3. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{40}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 39$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 37$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{26} = 17$.

Ответ: 680.

2.4. Про последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ известно, что

- величина $|a_i - a_{i+1}|$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$;
- величина $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ одинакова для всех $i = 1, 2, \ldots, 97$;
- $a_1 < a_2 < a_3$.

Найдите сумму всех чисел последовательности, если $a_{74} = 13$.

Ответ: 1300.

3.1. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 7 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 64.

Решение: Если Алёна зажгла только одну лампочку, то Ваня всегда увидит одно и тоже. Пусть Алёна зажгла хотя бы две лампочки. Пусть расстояние между крайними двумя зажжёнными лампочками равно d. Тогда количество вариантов того, что может увидеть Ваня, равно 2^d. Причём d может быть от 0 до 5. Итого всего разных вариантов того, что может увидеть Ваня, равно $1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 = 64$.

3.2. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 8 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 128.

3.3. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 9 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

Ответ: 256.

3.4. В тёмной комнате на стене в ряд через равные промежутки прикреплены 10 лампочек. Алёна вводит Ваню в комнату, а затем зажигает некоторые из лампочек (хотя бы одну). Ваня может определить только расположение лампочек друг относительно друга, то есть порядок и интервалы между горящими лампочками, но не может понять, как лампочки расположены относительно комнаты. Сколько различных конфигураций горящих лампочек Ваня может увидеть?

Например, если Алёна зажигает только одну лампочку, то какую бы лампочку она не зажгла, для Вани это будет выглядеть одинаково.

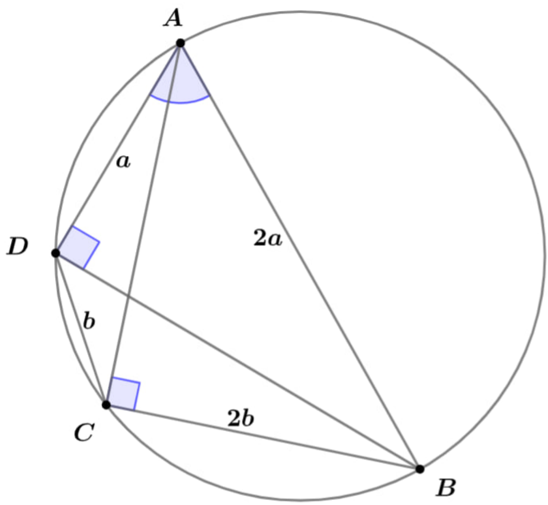
Ответ: 512.

4.1. Длина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 2AD$ и $BC = 2CD$ равна 1, а угол $\angle DAB = 60^\circ$. Найдите квадрат площади $ABCD$. *Ответ:* $\frac{75}{256}$.

Решение: Так как в треугольнике ABD $AB = 2AD$ и $\angle BAD = 60^\circ$, то $\angle ADB = 90^\circ$. Тогда $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$.

Пусть $AD = a, AB = 2a, DC = b, BC = 2b$. Тогда $BD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BCD получаем, что $b^2 + 4b^2 + 2b^2 = 3a^2$, т.е. $7b^2 = 3a^2$. Также по теореме пифагора для ACB получаем, что $1 + 4b^2 = 4a^2$. Из этих двух равенств узнаём, что $a^2 = \frac{7}{16}, b^2 = \frac{3}{16}$.

Площадь треугольника ABD равна $a^2\sin(60^\circ)$, а треугольника BCD — $b^2\sin(120^\circ)$. Итого площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{16}$, что в квадрате даёт $\frac{75}{256}$.



4.2. Длина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 2AD$ и $BC = 2CD$ равна 2, а угол $\angle DAB = 60^\circ$. Найдите квадрат площади $ABCD$.

Ответ: $\frac{75}{16}$.

4.3. Длина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 2AD$ и $BC = 2CD$ равна $\sqrt{2}$, а угол $\angle DAB = 60^\circ$. Найдите квадрат площади $ABCD$.

Ответ: $\frac{75}{64}$.

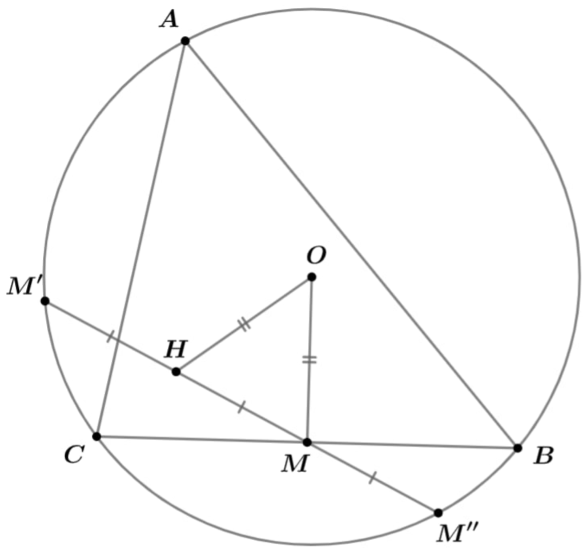
4.4. Длина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 2AD$ и $BC = 2CD$ равна $2\sqrt{2}$, а угол $\angle DAB = 60^\circ$. Найдите квадрат площади $ABCD$.

Ответ: $\frac{75}{4}$.

5.1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 11$, $OH = 7$. Чему равно BC^2?

Ответ: 288.

Решение: Пусть M'' — отражение H относительно M. Как известно, M'' лежит на описанной окружности ABC. Так как $OM' = OA$, то M' также лежит на описанной окружности ABC. Тогда $M'M''$ — хорда описанной окружности треугольника ABC, причём точки H и M делят её на три равные части. Тогда $OH = OM = 7$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника OMB получаем, что $\frac{BC^2}{4} = 11^2 - 7^2$, т.е. $BC^2 = 288$.



5.2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 13$, $OH = 8$. Чему равно BC^2?

Ответ: 420.

5.3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 12$, $OH = 9$. Чему равно BC^2?

Ответ: 252.

5.4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка O — его центр описанной окружности. Точка M — середина стороны BC, точка M' симметрична M относительно H. Известно, что $OA = OM' = 14$, $OH = 10$. Чему равно BC^2?

Ответ: 384.

6.1. В полоске 1×20 в каждой клетке лежит по одной монете. За один ход Лёша может выбрать две монеты, между которыми находится ровно одна клетка, и каждую из них можно сдвинуть на одну клетку навстречу другой (таким образом, они окажутся на одной клетке). Какое максимальное число клеток могло оказаться без монет через несколько ходов?

Ответ: 18.

Решение: Оценка. для каждой монеты рассмотрим расстояние до самой левой клетки. Понятно, что при любой операции сумма таких расстояний сохраняется, так как одна из монет движется влево, а другая — вправо. Заметим, что изначально эта сумма равна $0 + 1 + \ldots + 19 = 190$, что не делится на 20. Но если все 20 монет окажутся на одной клетке, то такая сумма должна будет делиться на 20. Значит, на одной клетке все монеты не собрать.

Пример. Проделаем операцию с монетами в клетках 1 и 3, затем в клетках 2 и 4 и т. д. (на i-м шаге делаем операцию с монетами в клетках i и $i+2$). Заметим, что i-й шаг сделать можно, потому что монета в клетке $i+2$ ещё не была задействована ранее, а в клетке i появилось 2 монеты после предыдущего шага. После того, как мы проделаем 18 таких шагов, у нас получится следующее расположение монет: в клетках 1 и 20 монет не будет, в клетках 2 и 19 будет по 2 монеты, а в клетках с 3 по 18 будет по одной монете. Аналогично, если у нас есть монеты (хотя бы по одной) подряд на клетках с i по j, мы можем за несколько шагов переместить монеты с клеток i и j в клетки $i+1$ и $j-1$, так что на остальных клетках ничего не изменится. Теперь, пользуясь уже новой операцией, будем постоянно перемещать монеты с краёв нашего ряда к центру. Расположение монет будет оставаться симметричным; в конце концов, мы придём к ситуации, когда на клетках 10 и 11 лежат по десять монет.

6.2. В полоске 1×30 в каждой клетке лежит по одной монете. За один ход Лёша может выбрать две монеты, между которыми находится ровно одна клетка, и каждую из них можно сдвинуть на одну клетку навстречу другой (таким образом, они окажутся на одной клетке). Какое максимальное число клеток могло оказаться без монет через несколько ходов?

Ответ: 28.

6.3. В полоске 1×40 в каждой клетке лежит по одной монете. За один ход Лёша может выбрать две монеты, между которыми находится ровно одна клетка, и каждую из них можно сдвинуть на одну клетку навстречу другой (таким образом, они окажутся на одной клетке). Какое максимальное число клеток могло оказаться без монет через несколько ходов?

Ответ: 38.

7.1. Биссектриса AL угла BAC треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Известно, что $\frac{AL}{LD} = 8$. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = 1$.

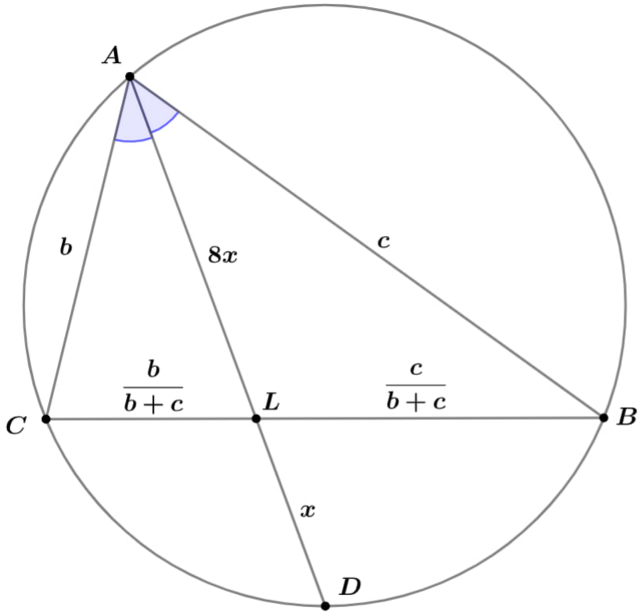
Ответ: 4.

Решение: Пусть $AC = b, AB = c, AL = 8x, LD = x$. Тогда в силу свойства биссектрисы и того, что $BC = 1$, получаем, что $CL = \frac{b}{b+c}$ и $BL = \frac{c}{b+c}$.

Заметим, что $AC \cdot AB = AL \cdot AD$ (это следует, например, из подобия треугольников ABL и ADC). Также из степени точки L получаем, что $AL \cdot LD = CL \cdot LB$. Т.е.

$$bc = 72x^2 \quad \text{и} \quad \frac{bc}{(b+c)^2} = 8x^2.$$

Из этих двух равенств мы получаем, что $b + c = 3$, т.е. периметр ABC равен 4.



7.2. Биссектриса AL угла BAC треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Известно, что $\frac{AL}{LD} = 15$. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = 1$.

Ответ: 5.

7.3. Биссектриса AL угла BAC треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Известно, что $\frac{AL}{LD} = 24$. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = 1$.

Ответ: 6.

8. Натуральные числа a, b таковы, что $a^2 + 3b = m^2$ и $b^2 + 3a = n^2$, где m, n — натуральные. Чему может быть равно $a + b$? В ответе укажите все возможные варианты.
Ответ: 2 и 27.

Решение: Понятно, что $m > a$ и $n > b$. Пусть $m \geqslant a + 2$ и $n \geqslant b + 2$. Тогда $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + 3a + 3b \geqslant (a + 2)^2 + (b + 2)^2 = a^2 + b^2 + 4a + 4b + 8$, противоречие. Тогда пусть, не умоляя общности, $m = a + 1$:

$$a^2 + 3b = a^2 + 2a + 1, \text{т.е. } a = \frac{3b - 1}{2}.$$

Тогда $b^2 + 3a = b^2 + 4,5b - 0,5$. Понятно, что это всегда меньше, чем $(b + 3)^2$, значит $n = b + 1$ или $n = b + 2$. Подставляем и получаем, что b равно 1 или 11, узнаём a (1 и 16) и получаем ответ (2 и 27).

9.1. Геннадий разрезал пирог весом 260 грамм на 11 кусков и съел самый лёгкий из них. Далее один из оставшихся кусков он разделил на два и опять съел самый лёгкий из одиннадцати кусков. Далее он опять разделил один из оставшихся кусков на два и съел из одиннадцати самый лёгкий. Какую наибольшую массу пирога в граммах мог съесть Геннадий?

Ответ: 60.

Решение. Оценка. Всего было съедено 3 куска сыра, и 10 кусков сыра осталось. Упорядочим веса этих 13 кусков: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{13}$. Обозначим через $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$ веса съеденных кусков.

Заметим, что последний съеденный кусок был не тяжелее 10 рассматриваемых не съеденных кусков, второй — не тяжелее, чем 8 из них, первый — не тяжелее, чем 6 из них. Отсюда следует, что $b_1 = a_1$, $b_2 \leqslant a_3$, $b_3 \leqslant a_5$.

Оценим количество съеденного сыра:

$$b_1 = a_1 \leqslant \frac{3a_1}{13} + \frac{3a_2}{13} + \frac{3a_3}{13} + \frac{3a_4}{13} + \frac{a_5}{13};$$

$$b_2 \leqslant a_3 \leqslant \frac{2a_5}{13} + \frac{3a_6}{13} + \frac{3a_7}{13} + \frac{3a_8}{13} + \frac{2a_9}{13};$$

$$b_3 \leqslant a_5 \leqslant \frac{a_9}{13} + \frac{3a_{10}}{13} + \frac{3a_{11}}{13} + \frac{3a_{12}}{13} + \frac{3a_{13}}{13}.$$

Сложив эти неравенства, получим $b_1 + b_2 + b_3 \leqslant \frac{3}{13}260 = 60$.

Пример. Режем сыр на 2 куска по 40 г и 9 кусков по 20 г, съедаем кусок в 20 г. Далее оба раза делим кусок в 40 г пополам и съедаем кусок в 20 г.

9.2. Геннадий разрезал пирог весом 350 грамм на 12 кусков и съел самый лёгкий из них. Далее один из оставшихся кусков он разделил на два и опять съел самый лёгкий из двенадцати кусков. Далее он опять разделил один из оставшихся кусков на два и съел из двенадцати самый лёгкий. Какую наибольшую массу пирога в граммах мог съесть Геннадий?

Ответ: 75.

9.3. Геннадий разрезал пирог весом 225 грамм на 13 кусков и съел самый лёгкий из них. Далее один из оставшихся кусков он разделил на два и опять съел самый лёгкий из тринадцати кусков. Далее он опять разделил один из оставшихся кусков на два и съел из тринадцати самый лёгкий. Какую наибольшую массу пирога в граммах мог съесть Геннадий?

Ответ: 45.