Тренировочная олимпиада

1. Действительные числа x, y и z таковы, что $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$. Докажите, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

2. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа

$$n, n+1, n+2, \dots, 2n-1.$$

Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

3. В окружности проведены хорды AB и AC, биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке D, точка E — основание перпендикуляра из D на прямую AB. Доказать, что длина AE равна полусумме длин AB и AC.

4. На плоскости отмечено $n > 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество параллелограммов площади 1 с вершинами в отмеченных точках не превосходит $\frac{n(n-2)}{6}$.

5. Дана бесконечная возрастающая последовательность положительных вещественных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$, каждое из которых меньше 1. Докажите, что существует число, встречающееся в последовательности

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \frac{a_4}{4}, \dots$$

ровно один раз.